



**IFSC USP**  
Instituto de Física de São Carlos

# Laboratório de Física II

## Livro de Práticas



Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos  
Laboratório de Ensino de Física

Laboratório de Física II: livro de práticas

São Carlos  
2013

© 2013 IFSC/USP

Todos os direitos reservados ao Instituto de Física de São Carlos

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC

Universidade de São Paulo. Instituto de Física de São Carlos. Laboratório de Ensino de Física.

Laboratório de Física II: livro de práticas/ Jose F. Schneider e Eduardo Ribeiro Azevedo; compiladores. São Carlos: Instituto de Física de São Carlos, 2013. 118p.

ISBN

1. Física. I. Schneider, José F., comp. II. Azevedo, E. R., comp. III. Título.

CDD 530

## *Agradecimentos*

Nosso trabalho de compilação, revisão e sistematização destas apostilas de Laboratório é a última contribuição aos esforços de muitos colegas do IFSC ao longo dos anos, que trabalharam no desenvolvimento das práticas e das primeiras versões das apostilas. Alguns colegas e mentores que gostaríamos especialmente de reconhecer são os professores Renê A. Carvalho, Horácio Panepucci, Otaciro Nascimento, Roberto Faria, Maria Cristina Terrile, Rosemary Sanchez, José Donoso, Cláudio Magon, Dietrich Schiel, Mariangela Tassinari, Máximo Siu Li, Antonio José da Costa Filho, Valmor R. Mastelaro, Francisco Guimarães e Tito Bonagamba. A contribuição do corpo técnico do Laboratório de Ensino tem sido fundamental em muitas oportunidades para o aprimoramento das montagens experimentais, e vale reconhecer o esforço de Amauri Gentil, Antenor Fabbri Petrilli Filho, Cláudio Boense Bretas, Ércio Santoni, Jae Antonio de Castro Filho e Marcos José Semenzato. A revisão desta edição teve a contribuição de Renato Antônio Cruz e João Renato Muniz, docentes colaboradores durante os anos de 2011 e 2013, respectivamente. Os compiladores também agradecem a biblioteca do IFSC pelo cuidadoso trabalho de normatização.

Como nenhuma revisão é verdadeiramente final, gostaria de receber os comentários, atualizações, sugestões e correções de todos aqueles que usaram este material em suas aulas de laboratório, para assim melhorar as futuras edições destas apostilas.

*José F. Schneider*  
*Eduardo Ribeiro Azevedo*

*São Carlos, Janeiro de 2013*



---

## Lista de Figuras

- Figura 1.1 - Esquema de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa (CM).  $d$  : distancia entre um elemento de massa  $\delta m$  e o eixo de rotação. Observe a relação entre o sentido da rotação e o sentido dos vetores velocidade angular e momento angular (“mão direita”). .....24
- Figura 1.2 - Roda de Maxwell. (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado para um tempo  $t_b$  de descida arbitrário. ....29
- Figura 1.3 - Choque rotacional entre dois discos girantes: (a) estado inicial, (b) estado final, após a colisão. ....31
- Figura 1.4 - Montagem experimental para analisar a colisão rotacional de duas peças cilíndricas. ....31
- Figura 1.5 - Exemplo de conservação do momento angular na direção vertical.....33
- Figura 2.1 - Representação das forças que atuam sobre um corpo submerso no interior de um líquido. ....42
- Figura 2.2 - Esquema de forças atuando em uma balança de tração.....44
- Figura 2.3 – Esquema de forças atuando em uma balança de força normal.....45
- Figura 2.4 - Areômetro de Nicholson. ....46
- Figura 2.5 - Utilização do areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um sólido. ....46



- Figura 2.6 - Utilização do areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um líquido..... 49
- Figura 3.1- Função de posição  $x(t)$  para o oscilador amortecido de acordo com a eq.(6). Linha tracejada: fator de modulação exponencial  $e^{-\gamma t}$  das amplitudes máximas de oscilação. .... 58
- Figura 3.2 - Amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  do oscilador amortecido forçado (eq. 11) em função da frequência de excitação  $\Omega$  da força externa, relativa ao oscilador livre  $\omega_0$ , para diferentes valores de fator de amortecimento  $\gamma$ : (a)  $\gamma = 0,025 \omega_0$ ; (b)  $\gamma = 0,05 \omega_0$ ; (c)  $\gamma = 0,12 \omega_0$ ; (d)  $\gamma = 0,25 \omega_0$ ; (e)  $\gamma = 0,50 \omega_0$ ..... 59
- Figura 3.3 - (a) Montagem experimental de um oscilador massa-mola vertical. Para experimentos de oscilação forçada, a posição do ponto de suspensão vertical da mola pode ser variada verticalmente mediante a alavanca acoplada ao disco girante com frequência  $\Omega$  (b)..... 65
- Figura 3.4 - Oscilação da massa  $m$  na água. (a) Posição de equilíbrio. (b) Posição inicial  $t=0$ , com afastamento  $x_0$  com relação à posição de equilíbrio. O valor de  $x_0$  corresponde à máxima amplitude durante o movimento de oscilação amortecido. (c) Posição extrema  $x_1$  após a massa completar médio período de oscilação ( $t=T/2$ )..... 66
- Figura 4.1 - Ondas estacionárias de deslocamento em uma corda presa em ambos extremos.  $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: anti-nó (máximo ou mínimo)..... 71

---

Figura 4.2 - Ondas estacionárias de pressão em um tubo fechado. $n$ : número de harmônico. $N$ : nó (zero). AN: anti-nó (máximo ou mínimo).....	72
Figura 4.3 - Dispositivo para a geração de ondas estacionárias em uma corda com os extremos presos. Na imagem é mostrada a excitação do modo fundamental $n=1$ .....	75
Figura 4.4 - Esquema do dispositivo para a geração de ondas de som estacionárias num tubo cilíndrico. ....	77
Figura 5.1 - Calorímetro utilizado nos experimentos (desmontado). ....	84
Figura 5.2 - Montagem experimental para medida do calor de vaporização da água. ....	88
Figura 6.1 - Diagrama P-V para o processo sobre o gás aplicado no experimento de Cléments-Desormes: entre o estado inicial (1) e o (2) o processo é adiabático. Entre (2) e (3) é isocórico. ....	97
Figura 6.2 - Experimento de Cléments-Desormes: (a) esquema do dispositivo com o manômetro acoplado. (b) Montagem experimental com a bomba manual para pressurização do gás na garrafa e o manômetro com coluna de água. ...	100
Figura 6.3 - Montagem utilizada nas medidas do método de Ruchardt .....	101
Figura 6.4 - Representação esquemática dos três estados considera-dos no processo do experimento de Cléments-Desormes. $P_2 =$ pressão atmosférica. ....	103
Figura 6.5 - Termômetro a gás a volume constante. ....	114





**Lista de Tabelas**

Tabela 2.1 - Densidades de alguns materiais .....	50
Tabela 5.1 - Calor específico de algumas substâncias e materiais.....	82
Tabela 5.2 - Calor latente de algumas transições de fase .....	83



## Sumário

<b>Introdução: por que Física? .....</b>	<b>15</b>
<b>O Laboratório de Física II .....</b>	<b>17</b>
<b>Dicas para a confecção dos Relatórios.....</b>	<b>19</b>
<b>Capítulo 1 Rotações de corpos rígidos- Conservação do momento angular .....</b>	<b>21</b>
1.1 Objetivos.....	21
1.2 Introdução.....	21
1.2.1 Corpos rígidos .....	21
1.2.2 Movimento de translação: quantidade de movimento...	22
1.2.3 Movimento de rotação: momento angular.....	23
1.2.4 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell).....	28
1.2.5 Choques rotacionais .....	31
1.3 Exemplos de conservação do momento angular .....	32
1.3.1 Roda de bicicleta .....	32
1.3.2 Momento de inércia e velocidade angular .....	33
1.4 Experimental.....	34
1.5 Procedimento.....	35
1.5.1 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell).....	35
1.5.2 Choques rotacionais .....	35
1.5.3 Demonstrações de conservação do momento angular.	37
<b>Apêndice: Momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos .....</b>	<b>39</b>
<b>Capítulo 2 Densimetria - Areômetros .....</b>	<b>41</b>
2.1 Objetivo.....	41
2.2 Introdução.....	41
2.2.1 Princípio de Arquimedes - empuxo.....	41
2.2.2 Medida de densidade de um sólido - Princípio de Arquimedes.....	43
2.2.3 Medida do volume de um sólido com uma balança .....	43
2.2.4 Balanças que sofrem ação de “força de tração” .....	44

2.2.5	Medida do volume, $v_s$ , e da densidade de um sólido, $\rho_s$ , utilizando-se o Areômetro de Nicholson.....	46
2.2.6	Medida da densidade de um líquido, $\rho_l$ , utilizando-se o Areômetro de Nicholson.....	48
2.3	Procedimento .....	50
2.3.1	Princípio de Arquimedes .....	50
2.3.2	Determinação do volume e da densidade de um sólido com uma balança.....	50
2.3.3	Determinação do volume e da densidade de um sólido utilizando o Areômetro de Nicholson.....	51
2.3.4	Determinação da densidade de um líquido utilizando o Areômetro de Nicholson.....	51
<b>Capítulo 3 Osciladores livres, amortecidos e forçados - Ressonância .....</b>		<b>53</b>
3.1	Objetivo .....	53
3.2	Fundamentos teóricos.....	53
3.2.1	Oscilador harmônico vertical livre .....	53
3.2.2	Oscilador harmônico vertical amortecido .....	54
3.2.3	Oscilador harmônico vertical forçado .....	57
3.3	Experimental .....	63
3.4	Procedimento .....	64
3.4.1	Oscilação no ar .....	64
3.4.2	Oscilação na água: análise do período de oscilação ....	64
3.4.3	Oscilação na água: análise da variação de amplitude ..	66
3.4.4	Oscilação forçada no ar .....	67
3.4.5	Oscilação forçada na água.....	68
<b>Capítulo 4 Ondas estacionárias .....</b>		<b>69</b>
4.1	Objetivo .....	69
4.2	Fundamentos teóricos.....	69
4.2.1	Ondas progressivas em cordas.....	69
4.2.2	Ondas estacionárias em cordas.....	70
4.2.3	Ondas de som estacionárias.....	72
4.3	Experimental .....	75
4.4	Procedimento .....	77
4.4.1	Ondas estacionárias na corda.....	77



4.4.2	Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função da frequência $f$ .....	78
4.4.3	Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função do comprimento $L$ .....	79
<b>Capítulo 5 Calorimetria .....</b>		<b>81</b>
5.1	Objetivo.....	81
5.2	Introdução.....	81
5.2.1	Calor específico .....	81
5.2.2	Calor latente: transições de fase .....	83
5.2.3	Medição das trocas de calor: o calorímetro .....	85
5.3	Procedimento experimental .....	86
5.3.1	Determinação da capacidade térmica de um calorímetro.....	86
5.3.2	Determinação do calor específico de um sólido .....	87
5.3.3	Determinação do calor latente de condensação da água.....	88
5.4	Procedimento experimental .....	91
5.4.1	Determinação da capacidade térmica do calorímetro... ..	91
5.4.2	Determinação do calor específico de um metal .....	92
5.4.3	Determinação do calor latente de condensação da água.....	93
<b>Capítulo 6 Processos térmicos em gases.....</b>		<b>95</b>
<b>Parte A: Medida do fator <math>\gamma</math> do ar</b>		
6.1	Objetivo.....	95
6.2	Introdução.....	95
6.2.1	O método de Cléments-Desormes .....	95
6.2.2	Método de Ruchardt .....	100
6.3	Parte Experimental .....	103
6.3.1	Método de Cléments-Desormes .....	103
6.3.2	Parte Experimental - Método de Ruchardt.....	106
<b>Parte B: Zero Absoluto - Método dos Mínimos Quadrados</b>		
6.4	Objetivo.....	110

---

6.5	Introdução .....	110
6.5.1	Expansão térmica dos gases - zero absoluto.....	110
6.6	Experimental: zero absoluto.....	112
6.6.1	Procedimento .....	112
<b>Anexo 1 Propagação de incertezas.....</b>		<b>115</b>
<b>Anexo 2 Expressões para o método de mínimos</b>		
	<b>quadrados .....</b>	<b>117</b>

## ***Introdução: por que Física?***

As Ciências Exatas, abrangendo Física, Matemática e Química, constituem o fundamento dos processos, técnicas e linguagem da Engenharia. Assuntos como, por exemplo, materiais inteligentes, modelos computacionais ou sensoriamento, fazem que a fronteira entre Ciências e Engenharias seja cada vez mais difusa. O profissional que não possua uma base de conhecimento sólida nestas disciplinas diminui drasticamente suas chances de compreender os problemas de sua área de atuação, ou mesmo de se comunicar com outros especialistas. Conseqüentemente, sua capacidade de resolver desafios tecnológicos e inovar fica limitada. Neste aspecto, o IFSC busca fazer uma contribuição decisiva logo no início deste processo de formação.



---

## *O Laboratório de Física II*

Os Laboratórios de Física tem uma missão diferente das disciplinas teóricas. Em primeiro lugar, oferecem a oportunidade de revisar e consolidar conceitos fundamentais de Física, fazendo a transposição a situações práticas concretas. Em segundo lugar, procuram desenvolver a capacidade de planejar e executar medições, processar os dados quantitativamente, e apresentar os resultados de acordo com os padrões da comunidade técnica e científica. **No entanto, a missão mais importante consiste em desenvolver a capacidade de análise crítico desses resultados, para discutir seu significado e validade, e extrair conclusões logicamente fundamentadas. Este quesito requer a maior atenção do estudante, pois terá o maior peso na avaliação.**

As apostilas das práticas tem a finalidade de apresentar os objetivos e métodos dos experimentos propostos, que deverão ser compreendidos antes de realizar a aula prática. A introdução teórica é apenas uma guia para revisar sumariamente os conceitos físicos imprescindíveis para entender a prática. Para uma discussão mais aprofundada, na seção de Bibliografia são indicados livros de referência. As seções de descrição da montagem experimental e dos procedimentos auxiliam na compreensão do experimento antes e durante a aula prática. As questões propostas tem a finalidade de chamar a atenção sobre aspectos fundamentais da prática, tanto da teoria como da análise dos resultados, e por isso o estudante sempre deve tentar responde-las. As caixas de texto tituladas **A Física** apresentam exemplos de diferentes aplicações práticas e sua

conexão com os conceitos físicos discutidos nos experimentos realizados no laboratório. Finalmente, o fator mais importante para garantir o aproveitamento da aula prática é a interação com o professor, os técnicos e os colegas: **sempre discuta suas dúvidas com eles.**

## *Dicas para a confecção dos Relatórios*

Apresentamos a seguir algumas sugestões de como o relatório de um dado experimento deve ser elaborado. Lembre-se que este relatório deve ser elaborado pensando que qualquer pessoa que tenha conhecimentos básicos de Física possa entender seu conteúdo sem ter que recorrer a outras fontes de informação.

- 1- **O relatório deve ser escrito em folha de papel almaço;**
- 2- **Indique inicialmente** o(s) Nome(s) do(s) aluno(s), que estão elaborando o relatório, a data de sua realização e o título do experimento de acordo com a apostila;
- 3- **OBJETIVO(S):** Descreva de maneira clara e sucinta (s) objetivo (s) que deverão ser alcançados durante a realização do referido experimento;
- 4- **EXPERIMENTO (MATERIAIS E MÉTODOS):** Descreva quais os materiais e aparelhos utilizados durante a realização do experimento e como os dados experimentais foram obtidos. Estas informações devem permitir a qualquer outra pessoa repetir sua medida sem que **seja necessária sua participação.**
- 5- **RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO:** Apresente seus resultados de forma ordenada através de tabelas, gráficos, etc. Descreva os itens apresentados na apostila e os resultados em seguida. Quando necessário, coloque no relatório equações e os dados utilizados nas mesmas.

**DISCUTA** seus resultados em função de outros obtidos no mesmo experimento ou de valores disponíveis em tabela ou de valores esperados.

- 6- **CONCLUSÕES:** Aqui deve ser apresentada uma conclusão geral do relatório, se os resultados obtidos estão de uma maneira geral próximos ao esperado e se não, quais foram as causas deste desacordo. Faça uma análise do conhecimento adquirido pelo grupo durante a realização do experimento.

A forma de organizar o relatório não é rígida. Pode-se dividi-lo em tantas partes forem necessárias. Se o mesmo incluir várias experiências diferentes, é preferível apresentá-las separadamente para facilitar a leitura.



## ***Capítulo 1 Rotações de corpos rígidos- Conservação do momento angular***

### **1.1 Objetivos**

Nesta prática será estudada a conservação do momento angular e a dinâmica de rotações de corpos rígidos. Será determinado experimentalmente o momento de inércia de uma peça com simetria cilíndrica (roda de Maxwell) e será analisada a dinâmica de colisões rotacionais plásticas.

### **1.2 Introdução**

#### **1.2.1 Corpos rígidos**

Em Mecânica se define como corpo rígido um sistema de massas cujas distâncias entre as massas são mantidas fixas durante o movimento. Os corpos rígidos de interesse prático são geralmente também extensos e formados por uma distribuição contínua de massa. O movimento de corpos rígidos extensos é mais complicado que o movimento de uma massa pontual, pois além do movimento de translação pode existir rotação ao redor de um ou mais eixos. A dinâmica de ambos os tipos de movimento pode ser claramente separada nos corpos rígidos.

### 1.2.2 Movimento de translação: quantidade de movimento

O movimento de translação do corpo rígido de massa  $M$  é completamente descrito fornecendo as coordenadas e a velocidade do centro de massa. De fato, pode se assimilar a dinâmica de translação do corpo como se toda a massa  $M$  estivesse concentrada no centro de massa. A quantidade de movimento total  $\vec{p}$  do corpo é

$$\vec{p} = M \vec{v} \quad (1)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do centro de massa. A equação que determina a dinâmica da translação é a Segunda Lei de Newton

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

onde  $\vec{F}_{ext}$  é a resultante da somatória de forças externas ao corpo. Quando não atuam forças externas, temos conservação da quantidade de movimento de translação do corpo rígido.

De modo análogo, as energias cinética de translação e potencial gravitacional do corpo rígido podem ser avaliadas simplesmente considerando, respectivamente, a velocidade e a altura  $H$  do centro de massa com relação ao nível de referência da energia potencial:

$$E_{CIN} = \frac{M v^2}{2} \quad ; \quad E_G = M g H . \quad (3)$$

### 1.2.3 Movimento de rotação: momento angular

O corpo rígido pode efetuar também rotações, existindo energia cinética e quantidade de movimento puramente associados a este movimento. A grandeza que representa a quantidade de movimento rotacional de um corpo rígido é o momento angular  $\vec{L}$  de rotação. Por simplicidade, suporemos que a rotação é realizada ao redor de um eixo passando pelo centro de massa do corpo, e que o corpo é simétrico ao redor desse eixo. Nessa situação, o momento angular resulta

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (4)$$

onde  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular e  $I$  é o momento de inércia do corpo rígido ao longo do eixo de rotação. O momento de inércia é obtido através da soma, ao longo de todo o corpo, das contribuições dos produtos entre os fragmentos elementares de massa  $\delta m_i$  e o quadrado de sua distância  $d_i^2$  ao eixo de rotação, como indicado na figura 1.1,

$$I = \sum_i d_i^2 \delta m_i. \quad (5)$$

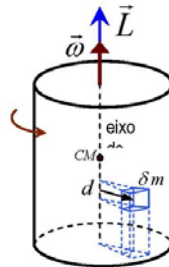
Para um corpo extenso de volume  $V$  e densidade  $\rho$ , a soma em (5) se expressa como uma integral ao longo dos elementos infinitesimais de volume com massa  $dm = \rho dV$

$$I = \int_V d^2 \rho dV. \quad (6)$$

No Apêndice estão mostrados os valores calculados de  $I$  para corpos homogêneos ( $\rho$  constante) de geometrias simples em

rotação ao redor de eixos de simetria, como aqueles que serão analisados na prática.

Figura 1.1 - Esquema de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa (CM).  $d$  : distancia entre um elemento de massa  $\delta m$  e o eixo de rotação. Observe a relação entre o sentido da rotação e o sentido dos vetores velocidade angular e momento angular (“mão direita”).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### ***A Física e a Engenharia Aeronáutica: helicópteros coaxiais***

Nos helicópteros convencionais, o motor exerce um torque sobre o conjunto do rotor, criando momento angular. Reciprocamente, pela terceira Lei de Newton, o rotor exerce forças de reação sobre o motor, transmitindo assim um torque sobre o resto do helicóptero. Quando a aeronave está em voo, não há agentes externos capazes de compensar esse torque, e o corpo do helicóptero tenderia a rotar com momento angular oposto ao do rotor. Para suprimir este movimento é que existe o rotor estabilizador de cauda, que cria um torque adicional sobre a fuselagem do helicóptero de maneira de mantê-lo estável.

- Se o rotor principal gira em sentido anti-horário (visto de cima), em que sentido deve girar o rotor estabilizador? Como depende sua resposta do ângulo de ataque das asas do estabilizador?
- O rotor estabilizador mantém sempre a mesma velocidade angular durante o voo?
- O comprimento da cauda influencia no regime de rotação do estabilizador?

Os *helicópteros coaxiais* oferecem outra solução para compensar a tendência à rotação da fuselagem: dois conjuntos de rotores idênticos com velocidades angulares opostas. Desta forma, o momento angular dos rotores é mutuamente cancelado, dispensando o uso de rotor de cauda. Uma vantagem deste desenho é a eliminação da *assimetria de sustentação*: a velocidades das pás do rotor à esquerda e direita da aeronave são diferentes com *referência ao ar*, o que causa forças de sustentação diferentes a esquerda e direita da aeronave.

**Questão:** Qual é a diferença de momento de inércia entre um disco fino de massa  $M$  e um cilindro longo da mesma massa?

**Questão:** Por que, de acordo com o Apêndice, um cilindro oco tem maior momento de inércia que um cilindro maciço de mesma massa e raio?

A equação que determina a dinâmica da rotação é uma consequência da Segunda Lei de Newton, e resulta

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (7)$$

onde  $\vec{\tau}_{ext}$  é o resultante dos torques de cada força externa atuando sobre o corpo

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext i} \quad (8)$$

Nesta expressão,  $\vec{r}_i$  é o vetor indicando o ponto de aplicação da força  $\vec{F}_{ext i}$  sobre o corpo, medido com relação ao centro de massa. Quando o torque externo total é nulo, temos conservação do momento angular de rotação do corpo rígido.

**Questão:** Pode existir uma força externa atuando sobre o corpo e não haver torque? Pode ter torque externo sem força?

**Questão:** Pode ocorrer que uma componente de  $\vec{L}$  se conserve e as outras não?

**Questão:** A força gravitacional atuando sobre um corpo rígido causa um torque?

**Questão:** A Terra possui momento angular de rotação? Se conserva? Qual é a consequência mais importante deste fenômeno?

A energia cinética associada à rotação do corpo rígido é dada pela expressão

$$E_R = \frac{I \omega^2}{2}, \quad (9)$$

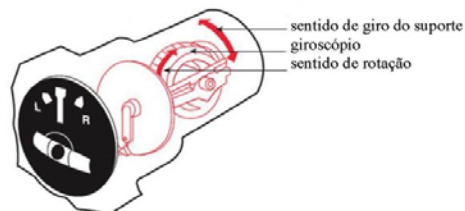
que é formalmente análoga à expressão da energia cinética de translação.

### *A Física e as Engenharias Mecatrônica, Aeronáutica e Civil: bússolas giroscópicas*

Em sistemas de navegação autônomos utilizados em pilotos automáticos de navios, aviões, foguetes ou em robótica é necessária uma orientação de referência. As bússolas magnéticas ou os magnetômetros não são aceitáveis para estas aplicações devido à distorção do campo magnético da Terra pelas estruturas metálicas, e a distribuição geográfica não regular das linhas de campo. A orientação magnética é também inacessível nos casos de navegação e estabilização aeroespacial, submarina, projetos de escavação em obras de engenharia civil e mineração, ou em prospecção petrolífera. Uma alternativa é o uso de sistemas com **giroscópios**, onde o momento angular de uma peça girante define uma direção fixa no espaço, independente da orientação da plataforma, desde que seja minimizado o efeito dos torques externos. A **bússola giroscópica**, utilizada em navios e aeronaves, é capaz de indicar a direção da velocidade angular da Terra e, portanto, do norte geográfico verdadeiro. Estes sistemas possuem motores elétricos e servomecanismos para compensar os efeitos do atrito nos rolamentos de suporte.

Outra função dos giroscópios é indicar o estado de movimento rotacional de uma plataforma de navegação (aeronave, satélite, foguete). Quando um giroscópio é rotado, existem torques exercidos sobre os suportes, que podem ser medidos e convertidos em sinais elétricos proporcionais à velocidade de rotação da plataforma. Um conjunto de três giroscópios com momentos angulares mutuamente perpendiculares é suficiente para determinar completamente o movimento de rotação de um sistema.

Além da navegação direcional, os giroscópios também são usados em outros dois instrumentos de navegação aeronáutica: o **horizonte artificial** e o **indicador de giro**, mostrado na figura, que fornece a direção e a intensidade da aceleração durante o giro da aeronave.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Atualmente, para determinar o movimento de rotação de uma plataforma os giroscópios mecânicos foram substituídos por pelos giroscópios ópticos, baseados na **interferência** de ondas de luz, e pelos giroscópios piezoelétricos de quartzo. Nestes últimos, os braços de um diapasão de quartzo com forma de "H" são forçados a vibrar através da aplicação de um potencial elétrico oscilante na frequência de ressonância da peça. Quando existe um movimento de rotação ao redor do eixo do diapasão com frequência  $\Omega$ , a **força de Coriolis** perturba a oscilação ressonante, causando uma segunda oscilação perpendicular dos braços. O sinal piezoelétrico associado a este movimento é detectado nos braços inferiores do diapasão, e permite determinar  $\Omega$ .

### 1.2.4 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

Nesta prática, o momento de inércia de uma peça cilíndrica complexa será medido experimentalmente utilizando o dispositivo conhecido como roda de Maxwell. O sistema, mostrado na figura 1.2, consta de um disco de raio  $R$ , sustentado por um eixo cilíndrico de raio  $r$ , tendo o conjunto massa  $m$  e momento de inércia  $I$ . O sistema é suspenso por dois fios, que permitem que o eixo rode sobre eles sem deslizar. Inicialmente, se escolhe uma posição a uma altura  $h$ , desde onde a roda será solta partindo do repouso. Subseqüentemente, a roda vai ganhar velocidades de translação do centro de massa  $v$  e de rotação  $\omega$  a medida que desce rodando pelos fios. O movimento de descida da roda ocorre com aceleração constante, e pode ser analisado considerando a conservação da energia mecânica total. No estado inicial  $a$ , a energia total é puramente potencial gravitacional

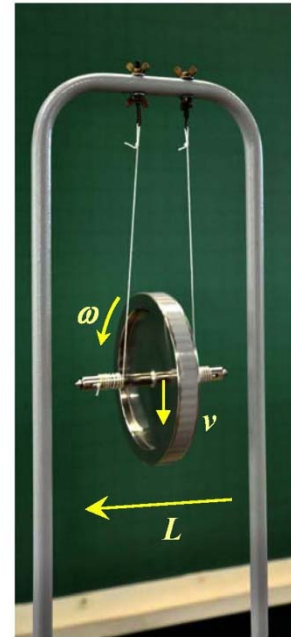
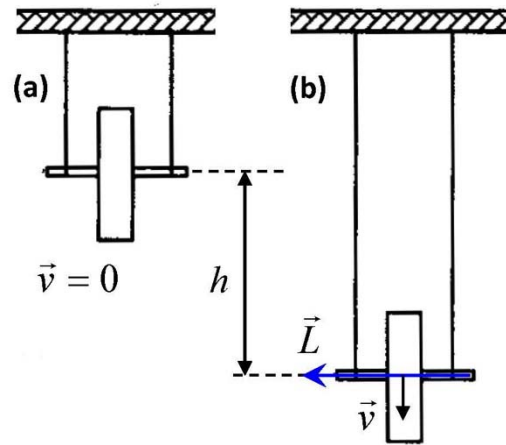
$$E_a = mgh. \quad (10)$$

Em uma posição arbitrária  $b$  durante a descida, o sistema possui energia cinética de translação e de rotação. Para simplificar, podemos considerar que a referência de energia potencial se encontra na altura do ponto  $b$ , resultando uma energia total

$$E_b = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (11)$$



Figura 1.2 - Roda de Maxwell. (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado para um tempo  $t_b$  de descida arbitrário.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se o eixo da roda gira sem escorregar sobre os fios de suspensão, teremos que as velocidades de translação e de rotação estão vinculadas pela condição de rodagem:

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (12)$$

Colocando esta condição na energia  $E_b$  e usando a conservação da energia para vincular com (10), resulta a condição

$$g h = \frac{v^2}{2} \left[ 1 + \frac{I}{m r^2} \right]. \quad (13)$$

Nesta equação, a única incógnita de tipo dinâmico é a velocidade  $v$ . Podemos determinar este parâmetro utilizando as equações para posição e velocidade do movimento uniformemente acelerado

$$h = \frac{a}{2} t_b^2 \quad \text{e} \quad v_b = a t_b \quad (14)$$

onde  $a$  é a aceleração do centro de massa e  $t_b$  é o tempo gasto para cair uma distância  $h$ . Combinando as equações (14), obtemos a velocidade do centro de massa

$$v = \frac{2h}{t_b} . \quad (15)$$

Substituindo esta equação em (13) encontramos o valor do momento de inércia da roda

$$I = \left( \frac{g t_b^2}{2 h} - 1 \right) m r^2 \quad (16)$$

Nesta expressão, o momento de inércia é função da altura do tempo de descida  $t_b$ , da distância  $h$ , do raio de giro sobre o barbante e da massa da roda.

Figura 1.3 - Choque rotacional entre dois discos girantes: (a) estado inicial, (b) estado final, após a colisão.

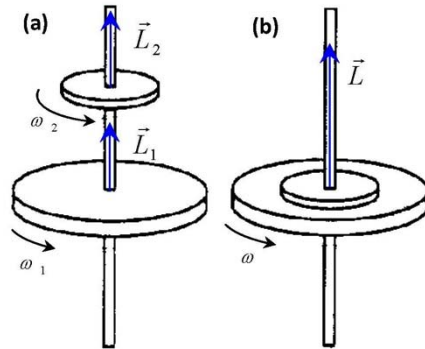
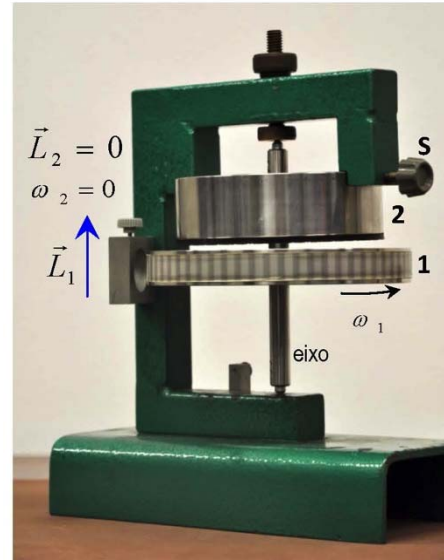


Figura 1.4 - Montagem experimental para analisar a colisão rotacional de duas peças cilíndricas.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 1.2.5 Choques rotacionais

Dois peças cilíndricas, com momentos de inércia  $I_1$  e  $I_2$  giram com velocidades angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em torno do mesmo eixo de rotação, sem atrito, como indicado na figura 1.3.a. Em certo instante, a peça 2 cai sobre a peça 1. Devido ao atrito entre as superfícies das duas peças, o conjunto passa a girar a uma velocidade angular comum  $\omega$ , como mostrado na figura 1.3.b. Considerando que as duas peças formam um sistema isolado de torques externos, o

momento angular total é constante. Logo, podemos escrever a equação de conservação do momento angular na forma

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega. \quad (17)$$

Logo, a velocidade angular final adquirida pelo conjunto será

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}. \quad (18)$$

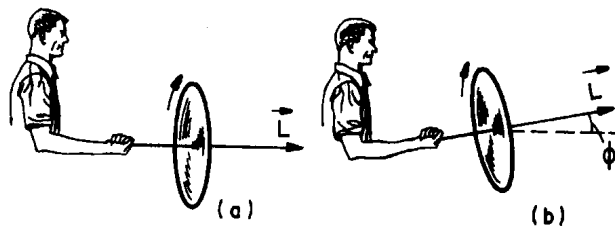
### 1.3 Exemplos de conservação do momento angular

#### 1.3.1 Roda de bicicleta

Um estudante fica sentado sobre um banco que pode girar livremente em torno do eixo vertical. Ele segura na mão uma roda de bicicleta cujo eixo é inicialmente mantido na horizontal, como mostrado na figura 1.5.a. Definimos como sistema o conjunto formado pelo banco giratório, estudante e a roda de bicicleta. Pode se considerar que este sistema está isolado de torques externos atuantes na direção vertical, e portanto a componente vertical do momento angular total do sistema se conserva. A roda gira em torno de seu eixo com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , mas o estudante e a plataforma estão em repouso. O momento angular inicial total do sistema na direção vertical é nulo. Em seguida, o estudante inclina o eixo de rotação da roda de um ângulo  $\phi$  em relação à horizontal, como mostrado na figura 1.5.b. Portanto, agora existe uma

componente de momento angular na direção vertical, devida à rotação da roda. Sendo que na direção vertical o momento angular do sistema é constante, e neste caso igual a zero, deve aparecer outra componente de momento que anule a componente vertical devida à roda. Portanto, o banco junto com a pessoa devem começar a girar.

Figura 1.5 - Exemplo de conservação do momento angular na direção vertical.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

**Questão:** Considerando o sentido de giro da roda mostrado na figura 1.5.a, em que sentido deveria rodar a pessoa com o banco na figura 1.5.b?

**Questão:** Existem forças externas atuando sobre o sistema (pessoa, banco e roda)? Por que se considera que não há torques atuando na direção vertical? Há torque em outras direções?

### 1.3.2 Momento de inércia e velocidade angular

Um estudante fica sentado sobre um banco pode girar livremente em torno do eixo vertical. Ele segura dois pesos de massas iguais,  $m$ , um em cada mão. Inicialmente, o estudante, com os braços fechados sobre o torso, é colocado a girar em torno do eixo vertical com uma velocidade angular  $\omega_1$ . O conjunto banco,

estudante e pesos formam um sistema com momento de inércia em relação ao eixo de rotação dado por  $I_1$ . De acordo com a discussão da seção anterior, o momento angular na direção vertical é constante. Em seguida, o estudante estende os braços alterando o momento de inércia do conjunto para um novo valor  $I_2$ , que será maior que  $I_1$ . Experimentalmente, se observa que o conjunto agora roda com uma nova velocidade angular  $\omega_2$ . Como o momento angular total na vertical deve se conservar devemos ter a condição

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

**Questão:** A pessoa roda mais rápido ou mais devagar com os braços estendidos?

## 1.4 Experimental

A figura 1.2 mostra a montagem da roda de Maxwell para determinar o momento de inércia da peça suspensa, usando a equação (16). O tempo de descida  $t_b$  desde a posição em repouso até uma certa altura  $h$  será registrado com um cronômetro.

Na figura 1.4 é mostrado o sistema para realizar colisões rotacionais. A peça identificada como 1 é a mesma utilizada no experimento da roda de Maxwell. A peça pode girar ao redor do eixo vertical, e é colocada em rotação aplicando um torque com um barbante enrolado no extremo superior do eixo. A peça identificada como 2, na parte superior, está em repouso e é segurada mediante a porca S. Esta peça é um anel de aço com a base inferior coberta de uma camada de borracha rugosa. Afrouxando a porca S, a peça 2

colide com 1. As velocidades de rotação inicial e final são medidas com um tacômetro com sensor óptico, que conta as franjas na lateral da peça 1.

## 1.5 Procedimento

### 1.5.1 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

- Defina qual será a altura  $h$  entre os estados (a) e (b) da figura 1.2, e determine o tempo de descida  $t_b$ , com seu respectivo desvio padrão. Enrole os dois barbantes simetricamente para evitar oscilações durante a descida.
- Com os valores medidos em (a), calcule o valor de  $I$  e sua incerteza usando a equação (16).
- Calcule o momento de inércia do disco a partir das características geométricas de cada uma das partes, usando as expressões de momento de inércia mostradas no Apêndice.
- Compare e discuta os resultados dos itens (b) e (c).

### 1.5.2 Choques rotacionais

- Coloque o disco do item 1 para girar e determine sua velocidade angular  $\omega_1$ . Observe cuidadosamente o comportamento de  $\omega_1$  em função do tempo. O que ocorre?

Como afeta este comportamento o experimento de colisão? É válido aplicar as equações (17) ou (18) nestas condições?

- b) Faça a colisão rotacional, soltando o disco 2, inicialmente com velocidade angular nula  $\omega_2=0$ .
- c) Determine a velocidade angular final  $\omega$  do conjunto.
- d) Assumindo a conservação do momento angular durante a colisão, determine o momento de inércia  $I_2$  da peça 2, a partir da equação (18).
- e) Calcule o momento de inércia  $I_2$  da peça 2 a partir de suas características geométricas, usando as expressões no Anexo.
- f) *Alternativa de análise no lugar de (d) e (e):* Caso os valores de  $I_1$  obtidos no experimento V.1 estejam muito divergentes, o que poderia indicar a presença de um erro sistemático no experimento, calcule  $I_1$  da equação (18) usando o valor de  $I_2$  determinado geometricamente.
- g) Repita todo o procedimento, realizando várias colisões independentes, e construa uma tabela como a mostrada embaixo. Calcule os valores médios dos momentos de inércia obtidos nas colisões. Seria válido calcular valores médios de  $\omega_1$  ou de  $\omega$ ?
- h) Compare os valores de momento de inércia obtidos e discuta os resultados.
- i) Calcule as energias cinéticas rotacionais antes de depois da colisão, e sua variação relativa. Verifique se há conservação ou não da energia cinética e explique por quê.



### 1.5.3 Demonstrações de conservação do momento angular

- a) Anexe em um apêndice do relatório a explicação dos fenômenos físicos observados nas demonstrações de
- Roda de bicicleta.
  - Momento de inércia variável.
- b) Responda as questões formuladas para cada experimento e inclua diagramas colocando os vetores pertinentes (velocidade angular, momento angular, torques externos).

### *Bibliografia*

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. **Física**. Rio de Janeiro: Livro Técnico S. A., 1973. v. 1.

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1978. v. 1

BONAGAMBA, T. J.; SANTONI, E.; LASSO, P. R. O.; BRETAS, C. B.; GENTIL, A.. Construção de um conjunto experimental destinado a execução de práticas de rotação e oscilação de corpos rígidos. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 17, n. 2, p. 133-139, jun. 1995.

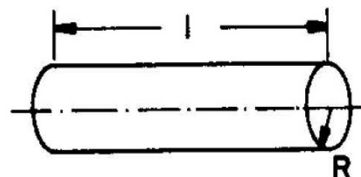


## Apêndice: Momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos

Eixo de rotação passando pelo centro de massa do corpo.

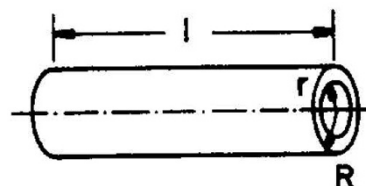
- Cilindro maciço, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



- Cilindro oco, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$$



No caso de momento de inércia para rotação ao redor de um eixo paralelo aos anteriores, mas que não passa pelo centro de massa do corpo, de ser adicionado um termo  $MD^2$  nas expressões acima, onde  $D$  é a distância ente os eixos de rotação (teorema de Steiner).



## Capítulo 2 Densimetria - Areômetros

### 2.1 Objetivo

– Determinação da densidade de líquidos e sólidos utilizando o princípio de Arquimedes.

### 2.2 Introdução

A densidade de uma substância é o quociente entre a massa e o volume da mesma

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

e é, geralmente, expresso com unidades do sistema CGS:  $g / cm^3$ .

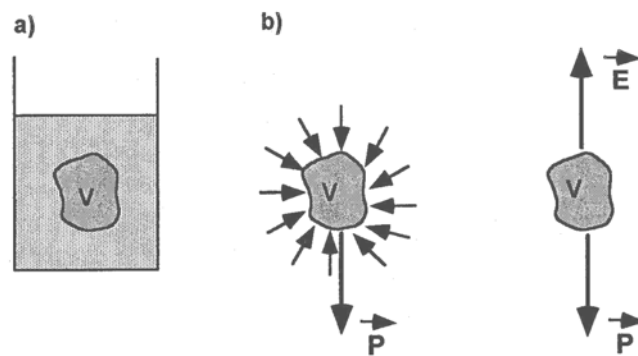
#### 2.2.1 Princípio de Arquimedes - empuxo

*“Um corpo mergulhado em um líquido, sofre a ação de uma força de sentido ascensional, cujo módulo é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo próprio corpo (Arquimedes)”.*

Suponhamos um líquido, com densidade  $\rho$ , em equilíbrio hidrostático no interior de um recipiente. Destaquemos uma porção do mesmo, com volume  $V$ , como mostra a figura 2.1a. Para que haja equilíbrio hidrostático é necessário que a resultante de todas as

forças que atuam, no volume de líquido destacado, seja nula. Uma delas é o peso,  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$ , do volume  $V$ . A outra força é a resultante,  $\vec{E}$ , das forças de pressão que o resto do líquido exerce na superfície do volume  $V$ , figura 2.1b. Ou seja,  $\vec{P} + \vec{E} = 0$ . Deste modo, a força  $\vec{E}$  que “empurra” a porção de líquido destacada, possui magnitude igual ao peso da mesma,  $E = P = \rho Vg$ , e é denominada *empuxo*.

Figura 2.1 - Representação das forças que atuam sobre um corpo submerso no interior de um líquido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

No caso de aquele volume,  $V$ , estar preenchido por outro corpo com densidade,  $\rho'$ , diferente daquela do líquido,  $\rho$ , o empuxo não será alterado. Isto é o empuxo,  $E$ , será sempre o peso do líquido de densidade  $\rho$  deslocado pelo corpo de densidade  $\rho'$  que foi introduzido em seu interior.

No caso em que  $\rho > \rho'$ , o corpo submerso no líquido deverá subir à superfície do mesmo, já que o empuxo exercido pelo líquido será maior que o peso do corpo. Caso contrário,  $\rho' > \rho$ , o corpo submerso deverá descer ao fundo do recipiente que contém o

líquido. Em ambos os casos, o corpo submerso no líquido não ficará em equilíbrio hidrostático.

### **2.2.2 Medida de densidade de um sólido - Princípio de Arquimedes**

### **2.2.3 Medida do volume de um sólido com uma balança**

O volume de um sólido pode ser obtido medindo-se o empuxo sofrido por ele quando mergulhado em um líquido de densidade conhecida, normalmente água. A determinação do empuxo depende da balança utilizada.

Dois tipos de balança são comumente utilizadas em laboratórios de ensino: aquelas sobre as quais atua uma força de tração e aquelas sobre as quais atua uma “força normal” (ver figuras 2.2.a e 2.3.a onde estão indicadas as forças exercidas sobre as balanças durante a pesagem).

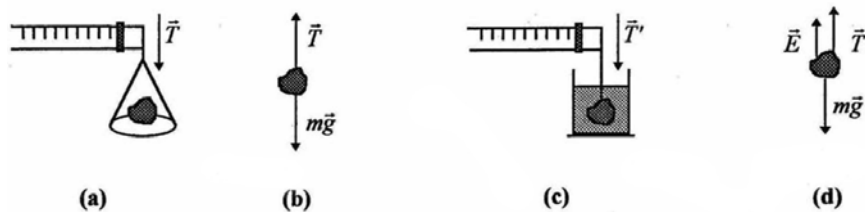
Observações preliminares:

1. Nos dois casos desprezaremos o empuxo devido ao ar.
2. Veja as figuras 2.2 e 2.3 para compreender o significado dos símbolos usados a seguir.
3. Lembre-se que o empuxo é dado por  $E = \rho_l v_s g$ , onde  $\rho_l$  é a densidade do líquido e  $v_s$  é o volume do sólido.

4. Balanças são calibradas em unidades de massa, isto é, o valor indicado em uma medida representa a força exercida sobre a balança dividida pela aceleração da gravidade.

### 2.2.4 Balanças que sofrem ação de “força de tração”

Figura 2.2 – Esquema de forças atuando em uma balança de tração.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Neste caso faz-se a leitura da massa real do corpo:  $m = T/g$  (figura 2.2.a) e depois a da sua *massa aparente*:  $m' = T'/g$  (figura 2.2.c). a partir dos diagramas de forças do corpo livre (2.2.b) e do corpo submerso (2.2.d) é fácil ver que, como ele está em equilíbrio,

$$E = mg - T' = mg - m'g$$

$$\rho_l v_s g = (m - m')g$$

$$v_s = \frac{m - m'}{\rho_l}$$

Se o líquido for água, cuja densidade é  $1g/cm^3$ , o volume do sólido (em  $cm^3$ ) será simplesmente a diferença entre as leituras da balança (em gramas) feitas com o corpo no ar e na água.

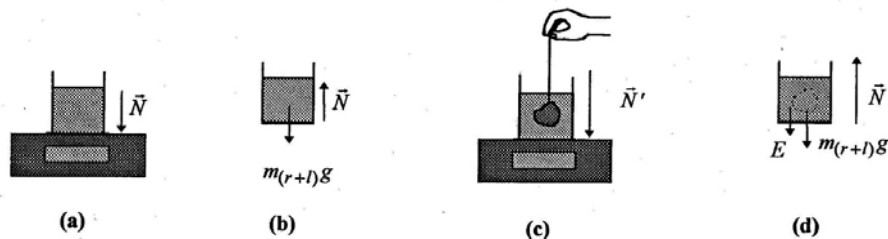


### 2.2.4.1 Balanças que sofrem ação de “força normal”

Neste caso deve-se primeiramente determinar a massa do recipiente com o líquido que será usado para submergir o corpo (figuras 2.3.a e 2.3.b):  $m_{r+l} = N/g$ . Depois mergulha-se o corpo cujo volume se quer determinar segurando-o por um fio, tomando-se cuidado para que ele fique totalmente submerso mas não encoste nem no fundo nem nas laterais do recipiente (figura 2.3.c). Faz-se a nova leitura na balança: ( $m'_{r+l} = N'/g$ ).

Através do diagrama de forças do recipiente com o líquido na situação em que o corpo está submerso (figura 2.3.d) obtém-se:

Figura 2.3 – Esquema de forças atuando em uma balança de força normal.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

$$E = N' - m_{r+l}g$$

$$\rho_l v_s g = (m'_{r+l} - m_{r+l})g$$

$$v_s = \frac{m'_{r+l} - m_{r+l}}{\rho_l}$$

Novamente, **se o líquido for água**, o volume do sólido será simplesmente a diferença entre as duas leituras da balança.

Note a diferença entre os dois casos: no primeiro aparecem as massas do corpo e no segundo as massas do recipiente com o líquido.

Em algumas balanças deste segundo tipo pode-se *tarar* a balança com o recipiente + líquido. Neste caso, se o líquido for água, o volume do corpo poderá ser lido diretamente na balança.

### 2.2.5 Medida do volume, $v_s$ , e da densidade de um sólido, $\rho_s$ , utilizando-se o Areômetro de Nicholson

Figura 2.4 - Areômetro de Nicholson.

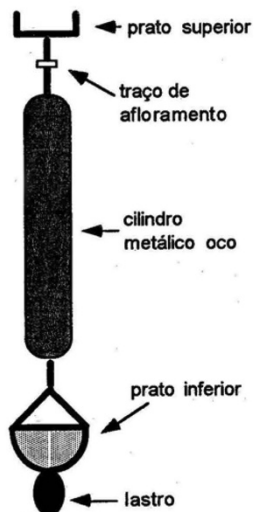
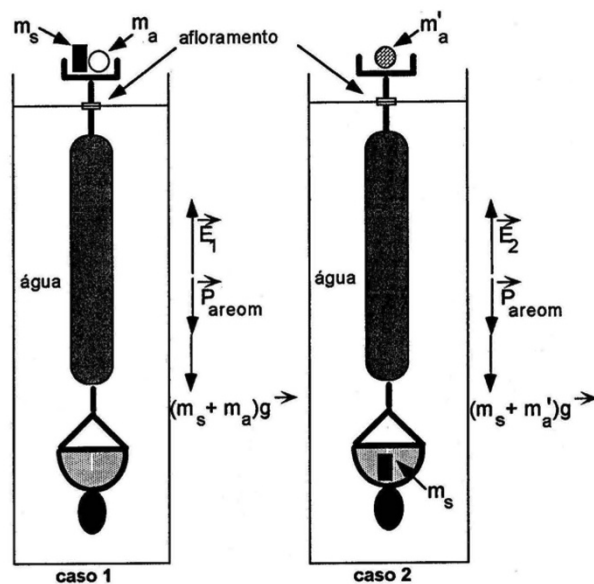


Figura 2.5 - Utilização do areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um sólido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

O Areômetro<sup>1</sup> de Nicholson consiste basicamente de um cilindro metálico oco, ao qual são adaptados dois pratos: um superior e outro inferior, figura 2.4. A haste que une o prato superior ao cilindro possui uma referência denominada “traço de afloramento”. Diz-se que ocorreu o “afloramento”<sup>2</sup> de um areômetro quando o mesmo se encontra em equilíbrio hidrostático, quando submerso em um líquido, e o “traço de afloramento” coincide com a superfície do fluido.

O volume da estrutura do areômetro situada abaixo do traço de afloramento será denominado por  $V_{areom}$ , enquanto que seu peso total será denominado por  $P_{areom}$ .

A medida do volume de um sólido,  $v_s$ , é feita segundo os seguintes procedimentos. Inicialmente, determina-se diretamente com uma balança a massa do sólido em questão,  $m_s$ . Posteriormente, coloca-se o corpo sólido juntamente com uma massa adicional,  $m_a$ , sobre o prato superior do areômetro de modo que seu “afloramento ou equilíbrio hidrostático” seja obtido quando submerso em água, caso 1, figura 2.5. Para este caso, a equação de equilíbrio hidrostático resulta em:

$$(m_s + m_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g V_{areom} \quad (2)$$

Em seguida, remove-se do prato superior o referido sólido, recolocando-o no prato inferior do areômetro. Para que o “afloramento” ocorra novamente, uma massa,  $m'_a$ , deve ser

---

<sup>1</sup> Areômetro: para medir densidades de líquidos ou sólidos.

Areômetro: para medir densidades de gases.

<sup>2</sup> Aflorar: colocar no mesmo nível.

acrescentada ao prato superior, caso 2, figura 2.5. O equilíbrio, neste caso, fornece:

$$(m_s + m'_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}}g(V_{areom} + v_s) \quad (3)$$

Associando as equações 2 e 3 obtemos o volume e a densidade do sólido:

$$v_s = \frac{(m'_a - m_a)}{\rho_{\text{água}}} \quad (4)$$

e

$$\rho_s = \frac{m_s}{v_s} = \frac{m_s}{(m'_a - m_a)}\rho_{\text{água}} \quad (5)$$

Em resumo: o empuxo sobre o sólido é simplesmente a diferença entre os pesos necessários para se obter afloramento com ele no prato inferior e no superior. Pois quando o corpo está dentro do líquido o empuxo sobre ele precisa ser compensado por uma massa de afloramento maior.

### 2.2.6 Medida da densidade de um líquido, $\rho_l$ , utilizando-se o Areômetro de Nicholson

A medida da densidade de um líquido,  $\rho_l$ , é feita segundo os seguintes procedimentos. Inicialmente, coloca-se o areômetro imerso em água, sendo “aflorado” com uma massa,  $m_t = m_s + m_a$ , no prato superior, caso 1, figura 2.6. Nesta situação o equilíbrio hidrostático nos fornece:

$$m_t g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g V_{areom} \quad (6)$$

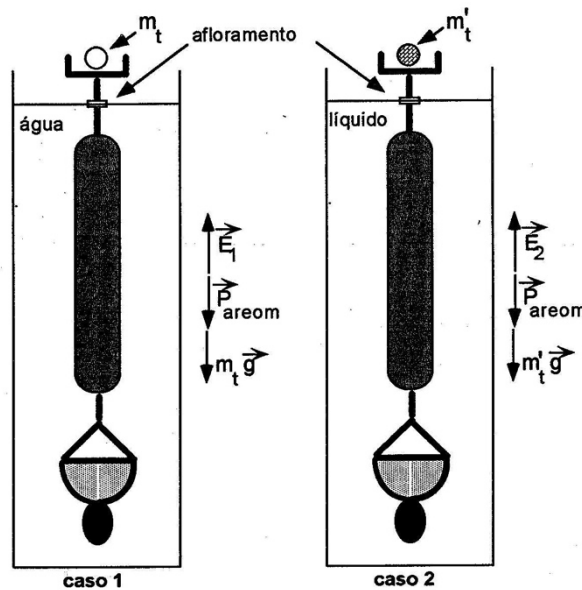
Posteriormente, coloca-se o mesmo areômetro imerso no líquido cuja densidade  $\rho_l$ , se quer determinar sendo “aflorado” com uma massa,  $m'_t$ , caso 2, figura 2.6, resultando em um equilíbrio hidrostático dado por:

$$m'_t g + P_{areom} = \rho_l g V_{areom} \quad (7)$$

Associando as equações 6 e 7 obtemos a densidade do líquido:

$$\rho_l = \rho_{\text{água}} - \frac{(m_t - m'_t)}{V_{areom}} \quad (8)$$

Figura 2.6 - Utilização do areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um líquido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Tabela 2.1 - Densidades de alguns materiais

<b>Material</b>	<b><math>\rho</math> (gr/cm<sup>3</sup>)</b>
Alumínio	2,69
Cobre	8,93
Latão	8,56
Água	1
Álcool	0,789
N <sub>2</sub>	0,001250 @ 0°C, 1 Atm

Fonte: Elaborada pelos compiladores

## 2.3 Procedimento

### 2.3.1 Princípio de Arquimedes

- Faça a verificação do Princípio de Arquimedes utilizando a montagem disponível no laboratório. Descreva este experimento em seu relatório.

### 2.3.2 Determinação do volume e da densidade de um sólido com uma balança

- Meça diretamente com uma balança a massa do sólido,  $m_s$ .
- Meça com uma balança o volume do sólido baseado nas informações descritas na apostila. Explique porque é possível neste caso obter o valor do volume diretamente da balança.
- Calcule a densidade do sólido e compare com o valor tabelado e determine de que material é feito este sólido.

### 2.3.3 Determinação do volume e da densidade de um sólido utilizando o Areômetro de Nicholson

- a) Meça diretamente com uma balança a massa do sólido,  $m_s$ .
- b) Faça o afloramento do areômetro com o sólido no prato superior conforme mostra a figura 2.5 (caso 1). Aproveite este afloramento para determinar o volume do areômetro utilizando a balança como foi feito na parte 2. Este volume será utilizado na parte 4.
- c) Meça diretamente na balança a massa adicionada no prato superior,  $m_a$ .
- d) Faça o afloramento com sólido no prato inferior do areômetro (Figura 2.5, caso 2).
- e) Meça diretamente com uma balança a massa adicionada no prato superior,  $m'_a$ .
- f) Calcule o volume e a densidade do sólido. Compare com os valores obtidos item 2(c). Discuta seus resultados.

### 2.3.4 Determinação da densidade de um líquido utilizando o Areômetro de Nicholson

- a) Faça o afloramento do areômetro em água conforme figura 2.6.
- b) Meça diretamente na balança a massa adicionada no prato superior,  $m_t$ .

- c) Faça o afloramento do areômetro no líquido cuja densidade se quer determinar. Secar bem o areômetro antes de mergulhá-lo no líquido pesquisado.
- d) Meça diretamente na balança a massa adicionada no prato superior,  $m'_i$ .
- e) Calcule a densidade do líquido. Compare com o valor medido utilizando um areômetro padrão e com valores tabelados. A que corresponde o líquido?

**Observações:**

1. Usar um copinho para colocar as massas no prato superior do areômetro.
2. Prender um fio de linha no areômetro para segurá-lo evitando, assim, que ele afunde se a massa colocada for maior do que a necessária para o afloramento.
3. Quando estiver próximo do ponto de afloramento dar pequenos toques no areômetro para tirar o efeito da tensão superficial do líquido.
4. O areômetro não deve encostar nas paredes do recipiente que o contém.

***Bibliografia***

TIMONER, A.; MAJORANA, F. S.; E HAZOFF, W. **Manual de laboratório de Física**: mecânica, calor e acústica. São Paulo: Edgard Blücher, 1973.



---

## **Capítulo 3 Osciladores livres, amortecidos e forçados - Ressonância**

### **3.1 Objetivo**

Estudar o comportamento de um oscilador massa-mola vertical no que diz respeito a amplitude e frequência das oscilações em função da viscosidade do meio (ar e água) e em condições de oscilação livre. Para oscilações forçadas por um agente externo, será estudado o fenômeno da ressonância.

### **3.2 Fundamentos teóricos**

#### **3.2.1 Oscilador harmônico vertical livre**

Consideramos em primeiro lugar um sistema massa-mola oscilando verticalmente no ar, onde o atrito da massa com o meio é pequeno. Na posição de equilíbrio, a mola fica alongada de maneira que sua força elástica compense o peso do corpo. Definimos esta posição de equilíbrio como a origem do sistema de coordenadas:  $x_{\text{eq}} = 0$ . Quando a massa é afastada do equilíbrio numa certa distância  $x_0$ , medida com relação à  $x_{\text{eq}}$ , o sistema responderá como um oscilador harmônico convencional e a posição da massa como função do tempo é descrita por

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad (1)$$

com frequência angular característica  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola e  $m$  a massa do corpo suspenso. Esta é a frequência natural de oscilação do sistema. Na equação (1) está assumido que em  $t=0$  se tem  $x(0) = x_0$ . A amplitude máxima de oscilação  $x_0$  deveria ser constante ao longo do tempo, e independente de  $k$  ou  $m$ . No entanto, sabemos que o atrito no meio não é exatamente nulo, e depois de algum tempo perceberemos que as amplitudes máximas das oscilações decaem no tempo, até o sistema ficar em repouso. Ainda assim, a aproximação de oscilador harmônico é satisfatória no ar, desde que analisemos o movimento durante as primeiras oscilações.

### 3.2.2 Oscilador harmônico vertical amortecido

Quando o movimento da massa ocorre dentro de um meio viscoso, como água, o amortecimento das oscilações é mais intenso que no ar e a aproximação de oscilador harmônico sem atrito não está justificada. Para tratar este problema devemos incluir uma força adicional, a força de atrito viscoso:

$$F_a = -b v = -b \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

que é proporcional à velocidade  $v$  do corpo, mas de sentido oposto. O fator  $b$  é uma constante que caracteriza o grau de amortecimento. Descrevendo o movimento desde o referencial com origem na posição de equilíbrio, a equação de movimento que resulta ao aplicar a Lei de Newton pode ser escrita como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} . \quad (3)$$

O termo  $-kx$  representa a força de restituição da mola. Esta equação é mais complicada que a equação do oscilador harmônico, devido à presença do termo com derivada primeira da posição  $x$ . A solução desta equação é:

$$x(t) = x_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega_1 t) \quad (4)$$

onde  $x_0$  é a amplitude máxima *inicial* (em  $t=0$ ) e  $\omega_1$  é a frequência angular da oscilação, dada por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} . \quad (5)$$

O termo  $\frac{b}{2m}$  é o *fator de amortecimento* e será representado pela letra grega  $\gamma$ . Observe que pela consistência dimensional da equação (5) a unidade de  $\gamma$  é radiano/segundo. Podemos reescrever a eq.(4) em termos de  $\omega_1$  e  $\gamma$  como:

$$x(t) = \left[ x_0 e^{-\gamma t} \right] \cos(\omega_1 t) , \quad (6)$$

e usando a definição da frequência natural  $\omega_0$ , podemos reescrever a equação (5) como:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} . \quad (7)$$

Podemos notar pela eq. (6) que a posição da massa oscila harmonicamente com a frequência  $\omega_1$ , com fator de amplitude dado

pelo termo entre colchetes, isto é, o produto de  $x_0$  pela função exponencial decrescente  $e^{-\gamma t}$ . Portanto, as amplitudes extremas da oscilação  $x_e$  serão progressivamente menores, com taxa de decréscimo diretamente proporcional a  $\gamma$ . Na figura 3.1 é mostrado o gráfico da função (6), indicando em linha tracejada o perfil da função exponencial. Podemos ver que se o amortecimento não é muito grande, a massa realiza várias oscilações com período  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , antes de retornar ao repouso. Quanto maior o valor de  $\gamma$ , mais rápido é o decréscimo das amplitudes das oscilações. Observe que em (7) existe uma condição crítica para o fator de amortecimento,  $\gamma_C = \omega_0$ . Nesta situação, chamada amortecimento crítico, o sistema não oscila e o retorno ao equilíbrio ocorre exponencialmente. Quando  $\gamma > \gamma_C$ , os valores de  $\gamma$  determinam maior tempo para o sistema retornar ao equilíbrio. Esta é a situação de amortecimento supercrítico.

**Questão:** De que forma o efeito do atrito perturba a frequência de oscilação?

**Questão:** A energia mecânica inicial do oscilador se conserva durante o movimento?

### A Física e a Engenharia: ressonância em estruturas

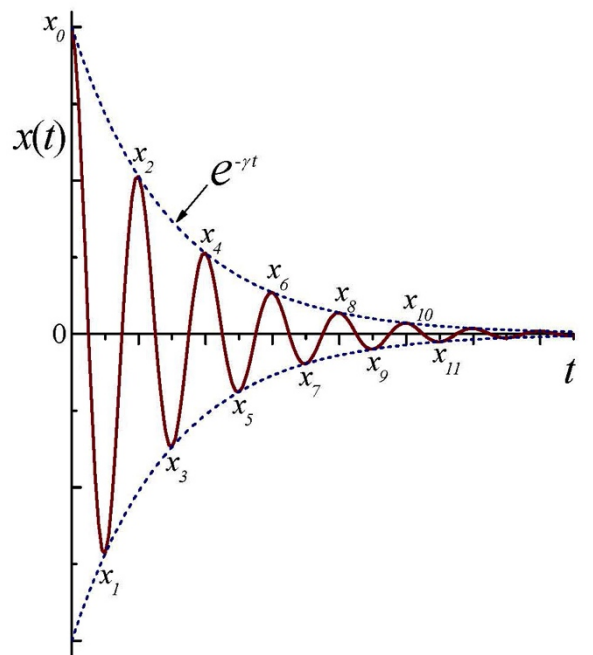
Toda estrutura construída (casa, prédio, ponte, etc...) possui inércia (massa, momento de inércia). Ao mesmo tempo, os materiais que a compõem apresentam elasticidade, dentro de certos limites, e dissipação da energia mecânica por atrito interno e/ou externo. Portanto, quando levemente afastada do equilíbrio por um agente externo, a estrutura poderá retornar a sua configuração de equilíbrio realizando oscilações amortecidas. Como todo sistema mecânico elástico, a estrutura terá frequências naturais de oscilação  $\omega_n$ , correspondentes a diferentes *modos de vibração*. Quando a força externa oscila com o tempo com frequência  $\Omega$ , por exemplo devido a um movimento sísmico ou perturbação pelo vento, a estrutura acompanhará essa oscilação com uma amplitude que dependerá de  $\Omega$ : será grande quando  $\Omega$  se aproxime de alguma frequência natural  $\omega_n$  (situação conhecida como condição de ressonância). Eventualmente, isto pode causar o colapso da estrutura. A queda da ponte de Tacoma Narrows é um exemplo clássico deste fenômeno, onde o processo de oscilação ressonante foi iniciado pela ação de vento de intensidade moderada sobre as superfícies planas da estrutura. É importante notar que na condição de ressonância as amplitudes de oscilação são grandes ainda que as forças externas sejam fracas: o importante é que a frequência de oscilação coincida com uma frequência natural do sistema. Uma forma de retirar a energia mecânica da estrutura quando oscila em ressonância é colocá-la em contato com outros sistemas que absorvam essa energia e a dissipem. Isto pode ser realizado com amortecedores convencionais com fluido, ou com amortecedores de “massa sintonizada”. Estes últimos são mais utilizados pela vantagem de precisar pouca manutenção. Trata-se apenas de pêndulos massivos cuja massa é ajustada para obter uma frequência de oscilação idêntica à frequência de ressonância da estrutura. Muitos arranha-céus e torres de comunicação de grande altura possuem um amortecedor desta classe no topo. Um dos exemplos mais chamativos é o edifício Taipei 101, que possui um pêndulo esférico central de mais de 700 toneladas com comprimento de suspensão de 4 andares, para minimizar a amplitude da vibração eólica da estrutura.

### 3.2.3 Oscilador harmônico vertical forçado

Para manter qualquer sistema físico oscilando em um meio com dissipação, é necessário compensar a perda de energia através de trabalho realizado por um agente externo. No sistema massa-mola, essa condição pode ser atingida através da ação de uma força

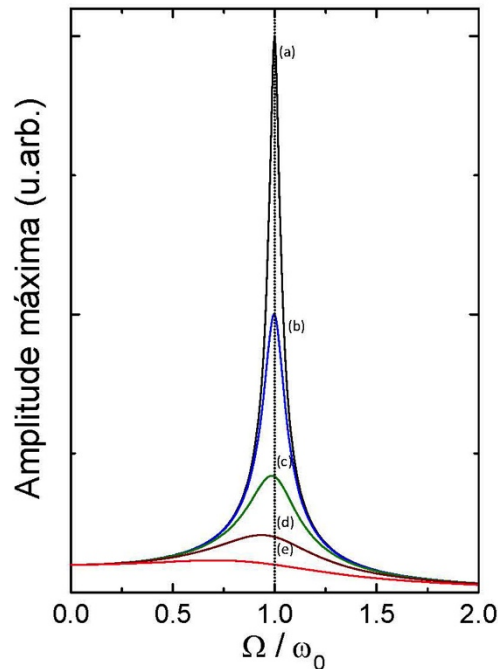
externa que varie no tempo, de maneira a manter a amplitude de oscilação constante. Neste caso, a oscilação é *forçada*.

Figura 3.1- Função de posição  $x(t)$  para o oscilador amortecido de acordo com a eq.(6). Linha tracejada: fator de modulação exponencial  $e^{-\gamma t}$  das amplitudes máximas de oscilação.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Figura 3.2 - Amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  do oscilador amortecido forçado (eq. 11) em função da frequência de excitação  $\Omega$  da força externa, relativa ao oscilador livre  $\omega_0$ , para diferentes valores de fator de amortecimento  $\gamma$ : (a)  $\gamma = 0,025 \omega_0$ ; (b)  $\gamma = 0,05 \omega_0$ ; (c)  $\gamma = 0,12 \omega_0$ ; (d)  $\gamma = 0,25 \omega_0$ ; (e)  $\gamma = 0,50 \omega_0$ .



Fonte: Elaborada pelos compiladores

A variação temporal da força externa mais importante de se analisar é a variação harmônica, por exemplo, cossenoidal

$$F_{ext} = F_0 \cos(\Omega t) \quad (8)$$

onde  $\Omega$  é a frequência angular de variação da força externa. A frequência está determinada pelo agente externo ao oscilador, por exemplo pela frequência de rotação de um motor. É um parâmetro independente das propriedades do oscilador: não tem qualquer relação com as frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_0$  estudadas

anteriormente.  $F_0$  é a amplitude máxima da força externa. Levando em consideração esta força adicional, a segunda Lei de Newton aplicada à massa em suspensão fornece a seguinte equação diferencial para a posição  $x(t)$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t \quad (9)$$

A solução desta equação é dada por

$$x(t) = [x_0(\Omega)] \cos(\Omega t + \delta) \quad (10)$$

É instrutivo comparar esta solução com as equações (1) e (6), do oscilador livre e do amortecido. A grande semelhança entre estas soluções é o termo cosseno, indicando que sempre temos oscilações harmônicas. No entanto em (10) a frequência das oscilações é  $\Omega$ , imposta sobre o sistema pelo do agente externo. Podemos dizer que a massa é forçada a “acompanhar” à oscilação da força externa, independentemente de qual for a frequência natural do oscilador. O parâmetro  $\delta$  é apenas uma constante de fase que depende de  $\Omega$ , que não será discutido nesta prática. Uma grande diferença entre (10) e as equações (1) ou (6) é o fator de amplitude da oscilação  $x_0(\Omega)$ . No oscilador forçado, esta amplitude está imposta pelo agente externo, e depende da frequência da força externa da seguinte forma:

$$x_0(\Omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}. \quad (11)$$



### ***A Física e a Engenharia Elétrica: amortecimento de vibrações em linhas de potência***

Os cabos de transmissão elétrica suspensos entre torres são susceptíveis de vibrar pelo efeito do vento. Como veremos na Prática de Ondas Estacionárias, se o comprimento do cabo e a frequência de vibração satisfazem a condição de ressonância, uma onda estacionária será estabelecida no cabo. Isto é prejudicial, pois expõe o cabo a tensões mecânicas indesejadas em certos pontos. Para eliminar estas vibrações, cuja faixa de frequência pode ser estimada, é possível acoplar pêndulos que vibrem com as mesmas frequências, absorvendo assim a energia mecânica do cabo de forma ressonante. Este sistema foi patenteado em 1928 por George Stockbridge, e consiste de duas massas fixadas nos extremos de um cabo curto que se suspende da linha de potência. Regulando o valor das massas e a tensão e comprimento do cabo de união é possível ajustar a frequência de oscilação. Este sistema é passivo, de baixo custo, pouca manutenção e facilmente ajustável.

Amortecedor de Stockbridge



Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge\\_damper](http://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge_damper)

- Qual seria a vantagem de usar este tipo de amortecedor em vez de simplesmente colocar mais pontos de *fixação* do cabo.



Fonte [http://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge\\_damper](http://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge_damper)

***A Física e as Engenharias Aeronáutica e de Produção Mecânica:  
ressonância de terra***

A estrutura de um helicóptero possui partes com resposta elástica (pneumáticos e/ou amortecedores no trem de pouso e nas asas), e portanto terá frequências de ressonância naturais. A *ressonância de terra* é um fenômeno destrutivo que pode ocorrer quando um helicóptero de três ou mais pás está pousado com o rotor em funcionamento. Se por algum motivo ocorrer um desbalanço que desalinhue o eixo de rotação da direção vertical, o helicóptero experimentará impulsos exercidos pela força de reação do chão sobre o trem de pouso. Esta excitação tem a periodicidade da rotação da hélice, e constitui uma condição de oscilação forçada da estrutura do helicóptero. Se a frequência desta excitação coincide com uma frequência natural da estrutura, o sistema oscilará com grande amplitude. O fenômeno de ressonância de terra é um processo divergente: maiores amplitudes de oscilação causam maiores desalinhamentos e, portanto, maior intensidade dos impulsos aplicados pelo chão. O processo é capaz de destruir completamente a estrutura da aeronave em segundos. A ocorrência desta condição pode ser neutralizada no projeto do helicóptero, determinando a calibração apropriada dos amortecedores para dissipar a energia mecânica das vibrações e deslocar as frequências naturais para faixas que não coincidam com o regime de rotação em pouso.

Um fenômeno semelhante ocorre com a máquina de lavar roupas, quando a carga fica desbalanceada: o sistema receberá impulsos periódicos do chão, com a frequência da rotação do motor. Se estes impulsos coincidem com uma frequência de vibração natural da máquina, esta vibrará com grande amplitude. É por este fenômeno que a máquina possui um conjunto de amortecedores de molas e pesos de compensação, que devem ser projetados cuidadosamente para minimizar a amplitude de oscilação em ressonância ou afastar a frequência de ressonância da faixa de rotações do motor.

Esta relação não depende do tempo, o que significa que as amplitudes  $x_0(\Omega)$  serão constantes. Analisando em detalhe a equação (11), observamos que deverá ocorrer um *máximo* para a amplitude de oscilação  $x_0$  quando o denominador desta equação corresponda a um *mínimo*. Esta condição ocorre quando a frequência da força externa  $\Omega$  é igual a certo valor particular  $\Omega_r$ , chamado de *frequência de ressonância*

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} . \quad (12)$$

Para o caso especial de amortecimento nulo ( $\gamma=0$ ) resulta  $\Omega_r = \omega_0$ . Nesta situação simples,  $x_0(\Omega)$  é pequeno quando  $\Omega \neq \omega_0$  e tende a infinito quando  $\Omega = \omega_0$ . Como na realidade há sempre algum amortecimento ( $\gamma \neq 0$ ), a amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  permanece sempre finita, embora possa tornar-se muito grande quando  $\Omega = \Omega_r$ . Este fenômeno é conhecido como *ressonância*: a oscilação terá a maior amplitude quando a frequência da força externa coincidir com a frequência de ressonância do sistema. Na figura 3.2 está representada a relação (11) como função da razão entre a frequência de excitação  $\Omega$  e a frequência do oscilador livre  $\omega_0$ . As diferentes curvas correspondem a diferentes valores do fator de amortecimento. É possível observar que quanto menor o amortecimento, maior a amplitude de oscilação, especialmente para frequências próximas da ressonância  $\Omega_r$ . Observe que a posição da  $\Omega_r$  muda levemente quando o coeficiente de amortecimento aumenta.

**Questão:** A frequência de ressonância é igual à frequência do oscilador livre? É maior ou menor? Os valores são próximos ou não?

### 3.3 Experimental

O oscilador massa-mola está montado verticalmente em um suporte, mostrado na figura 3.3. Para analisar o comportamento do oscilador amortecido, a massa é colocada para oscilar dentro de

uma proveta com água. O oscilador pode trabalhar de modo forçado simplesmente deslocando periodicamente na direção vertical o ponto de suspensão da mola. Para isso, é utilizada uma alavanca acoplada a um disco girante com velocidade angular  $\Omega$  constante, como mostrado na figura 3.3.b. A rotação é produzida por um motor elétrico, cuja frequência  $\Omega$  pode ser variada.

### **3.4 Procedimento**

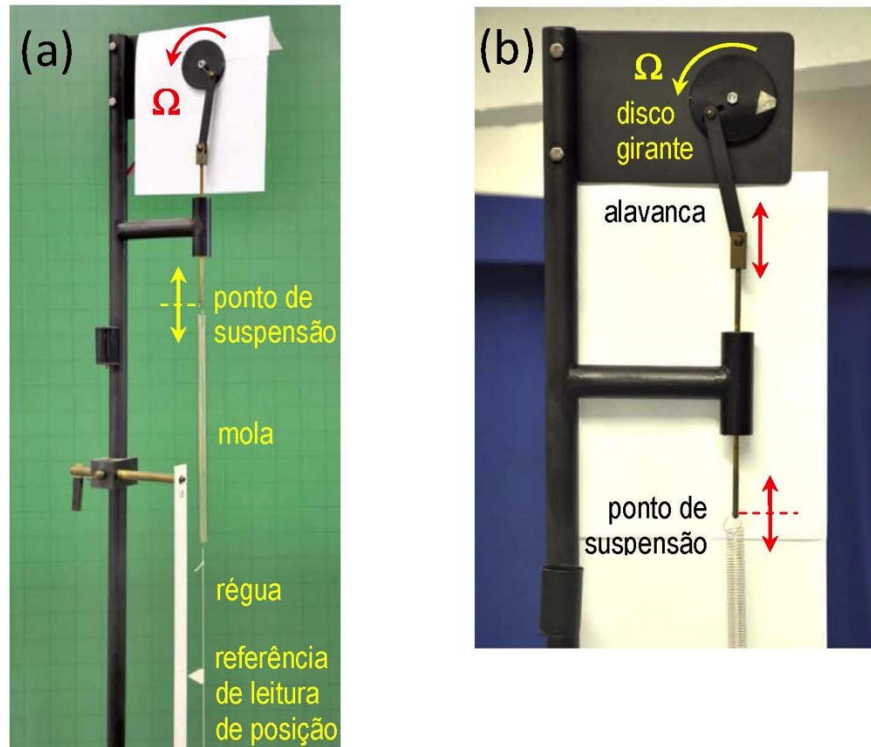
#### **3.4.1 Oscilação no ar**

Esta é a situação mais próxima de um oscilador livre. Suspenda verticalmente o sistema massa-mola, alongue a mola além da posição de equilíbrio, solte a massa e meça o período de oscilação  $T_0$ . Defina uma estratégia para diminuir a incerteza. Calcule frequência de oscilação  $\omega_0$  com sua incerteza.

#### **3.4.2 Oscilação na água: análise do período de oscilação**

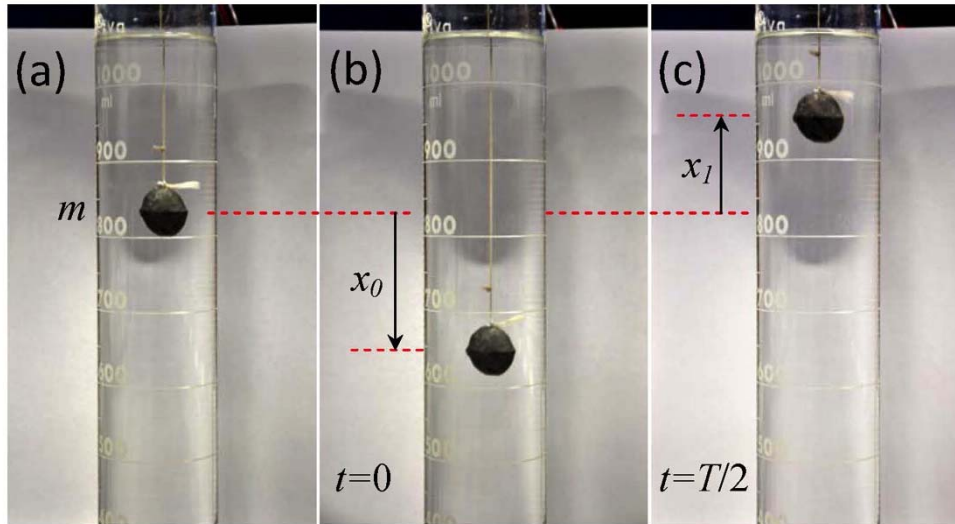
Coloque o corpo para oscilar verticalmente dentro da proveta com água. Cuide para que o corpo fique sempre submerso e que não bata nas paredes da proveta durante o movimento. Desloque a massa de sua posição de equilíbrio (figura 3.4) e deixe-a oscilar. Meça o período  $T_1$  com precisão e calcule a frequência  $\omega_1$ . Compare com o valor de  $\omega_0$ . Pode afirmar que são diferentes? É coerente com a equação (7).

Figura 3.3 - (a) Montagem experimental de um oscilador massa-mola vertical. Para experimentos de oscilação forçada, a posição do ponto de suspensão vertical da mola pode ser variada verticalmente mediante a alavanca acoplada ao disco girante com frequência  $\Omega$  (b).



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Figura 3.4 - Oscilação da massa  $m$  na água. (a) Posição de equilíbrio. (b) Posição inicial  $t=0$ , com afastamento  $x_0$  com relação à posição de equilíbrio. O valor de  $x_0$  corresponde à máxima amplitude durante o movimento de oscilação amortecido. (c) Posição extrema  $x_1$  após a massa completar metade do período de oscilação ( $t=T/2$ ).



Fonte: Elaborada pelos compiladores

### 3.4.3 Oscilação na água: análise da variação de amplitude

- a) Desloque a massa de sua posição de equilíbrio até uma amplitude inicial  $x_0$ , solte o corpo e analise a dependência das amplitudes *extremas*  $x_i$  de oscilação em função do tempo, tal como identificadas na figura 3.1. Para isso, terá que registrar a amplitude nos instantes  $t_i = 0, \frac{T_1}{2}, T_1, \frac{3T_1}{2}, 2T_1, \frac{5T_1}{2}, 3T_1, \dots$ , etc., onde  $T_1$  é o período de oscilação. Procure soltar a massa sempre da mesma posição inicial  $x_0$ .

- b) Construa uma tabela com os valores de  $t_i$ ,  $x_i$ , e os valores normalizados de amplitude  $|x_i/x_0|$ .
- c) Faça um gráfico de  $|x_i/x_0|$  versus  $t$ , em papel mono-log, e verifique que tipo de comportamento é observado. É consistente com a equação (6)?
- d) A partir do gráfico, determine o valor da constante de amortecimento  $\gamma$  e sua incerteza aproximada.
- e) Considerando o valor de  $\gamma$  obtido e os valores medidos para as frequências  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , discuta se estes resultados são consistentes com a equação (7).

### 3.4.4 Oscilação forçada no ar

- a) Coloque o corpo para oscilar no ar. Ligue o motor com uma frequência de rotação  $\Omega$  baixa. Meça a amplitude máxima de oscilação  $x_0$  do corpo. Repita o processo para vários valores de frequência  $\Omega$  diferentes (pelo menos dez valores). Construa uma tabela de  $x_0$  em função da  $\Omega$ . Estratégia de coleta de dados: comece com valores de frequências bem diferentes (mínima, máxima, média, bem próxima da ressonância), e agregue valores nas regiões onde observar grandes variações da amplitude com a frequência.
- b) Quando a frequência  $\Omega$  se aproximar de  $\Omega_r$ , as amplitudes de oscilação crescerão consideravelmente. Tente se aproximar da ressonância tanto como for possível, para valores de  $\Omega$  acima e abaixo de  $\Omega_r$ .

- c) Faça um gráfico da amplitude máxima de oscilação  $x_0$  em função de  $\Omega$ . Determine a partir do gráfico o valor provável da frequência de ressonância  $\Omega_r$  e compare com a frequência do oscilador livre. Discuta a coerência do seu resultado, levando em consideração as incertezas das frequências medidas.

### 3.4.5 Oscilação forçada na água

- a) Repita o experimento (d) agora com corpo oscilando dentro da proveta com água.
- b) Coloque os resultados no mesmo gráfico de (d). Determine o valor de  $\Omega_r$ .
- c) Compare os gráficos obtidos de amplitude máxima versus  $\Omega$  e discuta o efeito da variação do amortecimento sobre a forma da curva e a posição da ressonância. É consistente com a equação (12)?

## *Bibliografia*

TIPLER, P. A. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999. v. 1.



## Capítulo 4 Ondas estacionárias

### 4.1 Objetivo

Estudar o comportamento de ondas transversais estacionárias em cordas e em colunas de ar, e determinar a velocidade de propagação das ondas progressivas em cada um dos meios.

### 4.2 Fundamentos teóricos

#### 4.2.1 Ondas progressivas em cordas

Seja uma corda com densidade de massa linear  $\mu$ , mantida tensa através da aplicação de uma força constante  $F$ . Se um dos extremos da corda é pulsado periodicamente, é gerada uma onda harmônica viajando pela corda. Esta onda é dita transversal, pois a perturbação, ou oscilação no caso de ondas periódicas, é perpendicular à direção de avanço da perturbação, ou seja, da direção de propagação. A onda se propaga com velocidade  $v$  determinada pela relação:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (1)$$

A velocidade de uma onda progressiva depende somente das propriedades do meio (tensão e densidade, no caso da corda) em não da fonte que a gera (o agente que faz o extremo da corda oscilar).

Por outro lado, a velocidade de propagação da onda progressiva pode ser calculada sabendo que uma crista percorre uma distância  $\lambda$  (comprimento da onda) durante o tempo  $T$  (período de oscilação)

$$v = \lambda / T = \lambda f, \quad (2)$$

sendo  $f = 1/T$  a frequência (medida em Hertz).

### 4.2.2 Ondas estacionárias em cordas

Se as extremidades da corda estiverem fixas, é possível obter uma onda *estacionária* resultante da superposição de duas ondas viajando em direções opostas: a onda gerada pela fonte desde um extremo e a onda refletida no extremo oposto fixo.

A onda estacionária é uma oscilação da corda sem propagação da perturbação: as cristas não viajam pela corda. No entanto, cada elemento da corda oscila verticalmente com frequência  $f$ .

Na Figura 4.1 são mostrados os possíveis harmônicos para a corda com extremos fixos. A curva representada é a envoltória da oscilação: a máxima deflexão da corda para cima ou para abaixo. Ao longo do tempo, cada elemento de corda oscila verticalmente entre estes extremos com frequência  $f$ .

Pelo fato dos extremos da corda corresponder a nós da onda estacionária, os comprimentos  $\lambda_n$  dos harmônicos estão restritos. Da

Figura 4.1 pode se concluir que os únicos valores possíveis de  $\lambda_n$  numa corda de comprimento  $L$  devem satisfazer a condição:

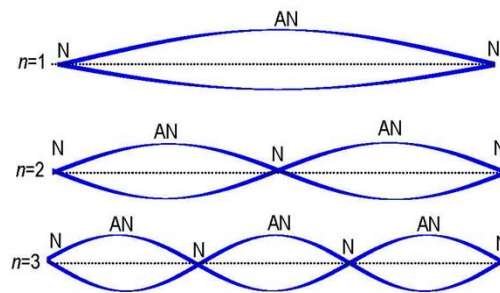
$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (3)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  é um número inteiro que identifica o harmônico gerado na corda. Como a velocidade das ondas que se superpõem na corda é sempre a mesma (depende unicamente do meio), então a frequência de cada harmônico deve ser diferente para manter o produto constante em (2):

$$v = \lambda_n f_n . \quad (4)$$

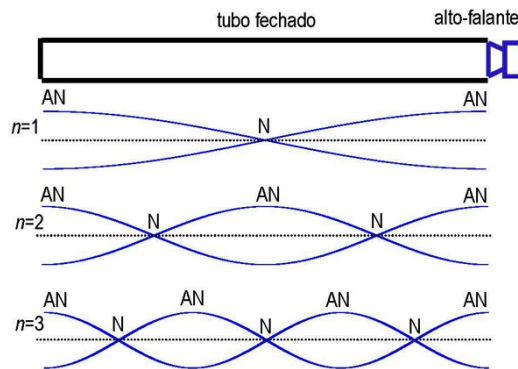
Deve ser notado que, em geral, um conjunto qualquer de valores de  $L$ ,  $\lambda$  e  $f$  não necessariamente garantem a existência uma onda estacionária, a menos que satisfaçam simultaneamente as equações (1) até (4).

Figura 4.1 - Ondas estacionárias de deslocamento em uma corda presa em ambos extremos.  $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: anti-nó (máximo ou mínimo).



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Figura 4.2 - Ondas estacionárias de pressão em um tubo fechado.  $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: anti-nó (máximo ou mínimo).



Fonte: Elaborada pelos compiladores

### 4.2.3 Ondas de som estacionárias

As ondas de som são perturbações da pressão se propagando através de um meio material. Nesta prática serão estudadas ondas de som no ar. As cristas e vales das ondas correspondem respectivamente a locais onde a pressão do ar é localmente máxima (compressão) ou mínima (expansão) com relação à pressão atmosférica média. As ondas de som são um tipo particular de onda longitudinal: a compressão ou expansão do meio ocorre na direção de avanço da onda.

Da mesma forma que ocorre na corda, a interferência de duas ondas sonoras de amplitude e frequência iguais viajando em direções opostas com velocidade  $v$ , produz uma onda estacionária. É possível criar uma onda estacionária dentro de um tubo com ar, colocando em um extremo uma fonte de som (por exemplo, um alto-falante) e deixando o outro extremo fechado, tal como mostrado na Figura 4.2. O alto-falante gera uma onda de som harmônica viajando

para esquerda, que incide na parede oposta do tubo, onde é refletida. A superposição desta onda refletida com a onda emitida pelo alto-falante cria a onda estacionária dentro do tubo. Como a parede fixa impede o deslocamento das moléculas do ar, ocorre uma crista de pressão nessa região do tubo. Portanto, nesse extremo teremos sempre a crista da onda estacionária de pressão de todos os harmônicos. No extremo oposto ocorre uma situação semelhante, pois a onda refletida incide sobre a membrana do alto-falante, comprimindo o ar e criando assim uma crista estacionária de pressão.

Na Figura 4.2 são representadas as envoltórias das possíveis ondas estacionárias compatíveis com estas condições nos extremos do tubo. Pode se observar da Figura 4.2 que os comprimentos de onda estão sujeitos à condição:

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (5)$$

sendo  $n$  número inteiro que identifica o modo de oscilação.

***A Física e a Engenharia Civil : acústica de ambientes***

Existem vários fenômenos físicos que determinam o comportamento acústico de um ambiente. Um deles é a formação de ondas estacionárias de som. As paredes atuam como refletores quase rígidos de ondas de som incidentes. Dependendo do comprimento destas ondas, pode ocorrer que a superposição da onda emitida pela fonte de som e a refletida por uma parede, ou entre duas ondas refletidas desde paredes opostas, produza uma onda estacionária. O fenômeno será percebido como um aumento na intensidade dos sons de certas frequências em alguns locais da sala. Este fenômeno ressonante pode ser analisado de maneira simplificada em uma dimensão considerando apenas duas paredes opostas atuando como refletoras de ondas, separadas por uma distância  $L$ . Nas paredes rígidas sempre haverá um anti-nó (crista ou vale) da pressão. Portanto os únicos comprimentos  $\lambda_n$  possíveis para as ondas estacionárias deverão satisfazer a condição  $L = n \lambda_n / 2$ , onde  $n$  é um número inteiro.

- Dadas estas condições, para quais valores de frequências  $f_n$  haverá ondas estacionárias nesta sala? (suponha uma velocidade do som de  $v=340\text{m/s}$ )
- Que poderia ser feito na sala para eliminar estas ondas estacionárias?
- O sub-woofer de um sistema de som é o alto-falante de maior tamanho, capaz de produzir sons com frequências entre 20 Hz e 200 Hz. Do ponto de vista da geração de ondas estacionárias, qual seria a diferença entre colocá-lo perto de uma parede ou no meio da sala?

Se o alto-falante oscila com frequência  $f$ , a velocidade  $v$  da onda emitida deve satisfazer a relação (2). Medindo o comprimento  $\lambda_n$  da onda estacionária e a frequência  $f$ , é possível determinar a velocidade do som. Como no caso de toda onda progressiva harmônica, a velocidade do som depende somente das propriedades do meio de propagação, sendo definida pela temperatura e a pressão.

**Exercício:** para um tubo de comprimento  $L$  fixo, determine qual é a relação entre  $f_n$  e  $n$  para ondas estacionárias no tubo fechado.

**A Física e as Engenharias Aeronáutica e Eletrônica:  
câmeras anecoicas**

Uma *câmara anecoica* é uma sala especialmente acondicionada para evitar reflexões de ondas de som ou de rádio, com a finalidade de efetuar análises precisas de equipamentos.

- Que propriedades devem satisfazer os materiais e geometria das paredes?
- Qual poderia ser o interesse de testar componentes aeronáuticos, espaciais e de comunicação neste tipo de instalação?

### 4.3 Experimental

O dispositivo para gerar ondas estacionárias, mostrado na Figura 4.3, está constituído de uma corda com uma extremidade presa a um pino vibrando verticalmente com frequência  $f$ . A fonte de vibração do pino é um alto-falante excitado com um sinal elétrico sinusoidal de frequência  $f$ , que é fornecido por um gerador de voltagem. A outra extremidade da corda está conectada através de uma roldana a uma massa suspensa, que define a tensão  $F$  aplicada. É possível assim obter ondas estacionárias na corda com comprimentos de onda dependentes da tensão  $F$  aplicada, da frequência  $f$  e do comprimento  $L$  da corda.

Figura 4.3 - Dispositivo para a geração de ondas estacionárias em uma corda com os extremos presos. Na imagem é mostrada a excitação do modo fundamental  $n=1$ .

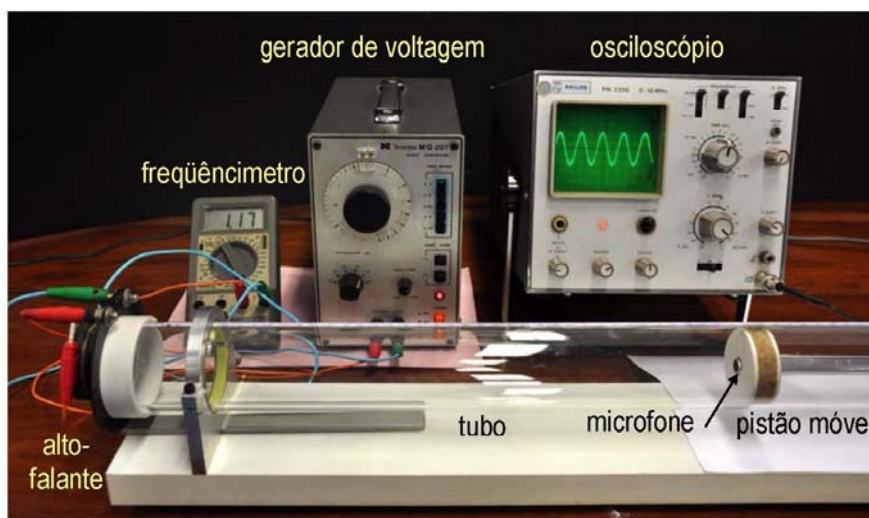
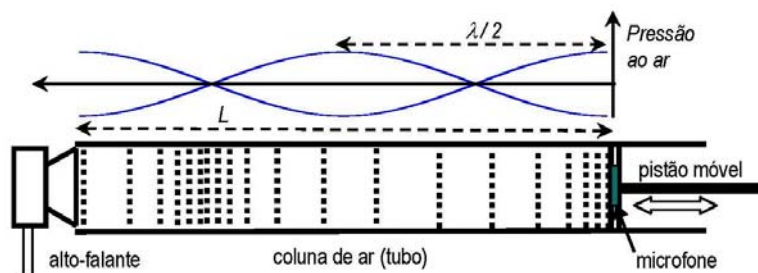


Fonte: Elaborada pelos compiladores

O dispositivo utilizado para gerar ondas de som estacionárias está mostrado na Figura 4.4. O alto-falante é excitado através de um gerador de voltagem harmônico com frequência  $f$ . No extremo oposto, o tubo está fechado com um pistão móvel acoplado a um microfone. O sinal elétrico fornecido pelo microfone, proporcional à amplitude da pressão, é monitorado através de um osciloscópio (medidor de voltagem em função do tempo). Deslocando o pistão é possível controlar o comprimento  $L$  da coluna de ar. Quando uma condição de ressonância for atingida, será registrada pelo microfone a maior intensidade (máxima) da voltagem oscilante, devido ao aparecimento da máxima crista de pressão sobre a parede do tubo.



Figura 4.4 - Esquema do dispositivo para a geração de ondas de som estacionárias num tubo cilíndrico.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

## 4.4 Procedimento

### 4.4.1 Ondas estacionárias na corda

Nesta parte da prática serão gerados os diferentes harmônicos na corda, partindo desde o fundamental ( $n = 1$ ), mantendo constantes  $L$  e  $F$ .

- a) Suspenda uma massa  $m$  da ordem de 200 g. Faça o vibrador funcionar e varie lentamente a frequência  $f$ , partindo desde valores baixos, até observar o aparecimento de ondas estacionárias. Ajuste cuidadosamente a frequência até atingir a maior amplitude máxima de oscilação na corda.
- b) Construa uma tabela registrando os valores do índice  $n$  do harmônico, o número de nós,  $\lambda_n$  e  $f_n$ . Determine a velocidade das ondas para cada harmônico. É constante? Do conjunto de dados, determine o valor de  $v$  com sua incerteza.
- c) Usando a velocidade medida, determine o valor de  $\mu$ . É consistente com a corda utilizada? Confira.

#### **4.4.2 Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função da frequência $f$**

Este experimento é análogo ao da parte (1), porém com ondas de som. Serão gerados os diferentes harmônicos no tubo, partindo desde o modo fundamental ( $n = 1$ ), para  $L$  fixo.

- a) Conecte a bateria do microfone e ligue o gerador de ondas. Deslocando o pistão, fixe um comprimento  $L$  da coluna de ar da ordem de 0,15m. Mude a frequência do gerador até observar no osciloscópio as ondas de pressão com a maior intensidade. Essa condição corresponde a uma onda estacionária.
- b) Começando o experimento desde as menores frequências, para ter certeza de detectar o modo fundamental, registre os valores

de  $f_n$  correspondentes aos sucessivos harmônicos. Construa uma tabela com os valores do índice  $n$  do harmônico e  $f_n$ .

- c) Faça o gráfico de  $f_n$  versus  $n$ . Que tipo de relação é observada? É coerente com as equações que definem a onda estacionária?
- d) Analisando os dados de (b) com o método dos mínimos quadrados, determine a velocidade das ondas de som. Compare com valores de referência.
- e) Que valor deveria assumir o coeficiente linear? É coerente com o resultado do seu experimento?
- f) Como poderia garantir que o primeiro harmônico observado corresponde a  $n=1$ ? Qual seria a frequência esperada para o modo fundamental  $f_1$  no tubo? Coincide com sua menor frequência da tabela? Explique.

#### 4.4.3 Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função do comprimento $L$

Neste experimento a frequência de excitação  $f$  é fixa, e os harmônicos serão gerados variando o comprimento  $L$  da coluna de ar. Observe que agora, de acordo com a relação (2) se  $f$  está fixa o comprimento de onda  $\lambda$  deve ser *constante*. Portanto, da equação (5), para obter uma onda estacionária o comprimento do tubo somente poderá assumir valores  $L_n$  dados pela relação

$$L_n = n \frac{\lambda}{2} . \quad (5)$$

Para maiores comprimentos do tubo, resultam harmônicos de ordem  $n$  maior.

- a) Coloque uma frequência  $f$  da ordem de 2 kHz. Deslocando o pistão, observe que em certas posições  $L_n$  as ondas de pressão têm intensidades máximas, correspondendo a condições de onda estacionária.
- b) Começando com o pistão posicionado próximo do alto-falante, para ter certeza de detectar o modo fundamental, registre os valores de  $L_n$  correspondentes a sucessivos harmônicos  $n$ . Construa uma tabela com os valores do índice  $n$  do harmônico e  $L_n$ , e uma coluna com as diferenças entre valores sucessivos  $L_{n+1} - L_n$ . De acordo com (5), e que deveria acontecer com os valores dessas diferenças?
- c) A partir dos dados obtidos, determine o valor mais provável de  $\lambda$  e sua incerteza.
- d) Calcule a velocidade do som no ar, com sua incerteza. Compare com o resultado do experimento (2).

## ***Bibliografia***

TIPLER, P. A. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999. v. 1.

## Capítulo 5 Calorimetria

### 5.1 Objetivo

Determinar o calor específico de um sólido e o calor latente de condensação da água, utilizando um calorímetro com capacidade térmica determinada experimentalmente.

### 5.2 Introdução

#### 5.2.1 Calor específico

Considere dois corpos  $A$  e  $B$ , a diferentes temperaturas,  $t_a$  e  $t_b$  respectivamente, tais que  $t_a > t_b$ . Ao colocá-los em contato, ocorre uma transferência de energia térmica, calor, do corpo  $A$  para o corpo  $B$ . A transferência de calor cessa ao ser atingido o equilíbrio térmico entre os dois corpos, ou seja, quando suas temperaturas se igualam,  $t'_a = t'_b$ .

A quantidade de calor,  $Q$ , corresponde a quantidade de energia térmica trocada pelos corpos. Portanto, no sistema internacional, a unidade de quantidade de calor é o Joule (J). Por razões históricas, outra unidade é também usada, a caloria (cal), cuja relação com o Joule é:  $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$ .

Quando um corpo muda sua temperatura desde um valor inicial  $t_i$  até uma temperatura final  $t_f$ , a quantidade de calor  $Q$  recebida (ou

cedida) depende diretamente de sua massa  $m$ , e da variação de temperatura  $\Delta t = t_f - t_i$ :

$$Q = cm\Delta t \quad (1)$$

sendo o coeficiente de proporcionalidade  $c$  denominado *calor específico do corpo*, uma propriedade específica do material que o constitui. Diferentes substâncias apresentam distintos valores de calor específico, os quais também dependem da fase (sólida, líquida ou gasosa) em que ela se encontra. Na tabela 5.1 são mostrados valores de calor específico para algumas substâncias.

Tabela 5.1 - Calor específico de algumas substâncias e materiais

<b>Substância / material</b>	<b>c (cal/g°C)</b>
gelo	0,500
água (líquido)	1,000
água (vapor)	0,480
madeira (pinus)	0,60
isopor	0,33
concreto	0,18 - 0,23
rocha	0,20
alumínio	0,218
cobre	0,093
latão	0,092
prata	0,056
ouro	0,032
etanol (0°C)	0,131
Freon R-12 (-18°C)	0,217

Fonte: Elaborada pelos compiladores

## 5.2.2 Calor latente: transições de fase

Existem outros fenômenos térmicos em que, embora ocorram trocas de calor, a temperatura permanece constante. É o que acontece quando o estado físico da substância está mudando de uma forma para outra: de líquido para gás, de sólido para líquido, de uma forma cristalina para outra, etc. Estes processos são as *transições de fase*. A energia térmica entregada (ou cedida) ao corpo não modifica sua temperatura, porém afeta a organização molecular. A quantidade de calor necessária para que um corpo mude de fase, mantendo sua temperatura fixa, é proporcional a sua massa  $m$ :

$$Q = L m \quad (2)$$

sendo a constante de proporcionalidade,  $L$ , denominada *calor latente*, uma característica da substância e do tipo de transição de fase. Assim, com a convenção  $Q > 0$  quando um sistema recebe calor, e  $Q < 0$  quando cede, o calor latente poderá ser positivo ou negativo, dependendo da mudança de fase ocorrer com ganho ou perda de calor pelo sistema. Na tabela 5.2 são mostrados alguns valores característicos.

Tabela 5.2 - Calor latente de algumas transições de fase

Transição	$L$ (cal/g)
fusão do gelo (a 0°C)	80
solidificação da água (a 0°)	-80
vaporização da água (a 100°)	539
condensação do vapor de água (a 100°)	-539

Fonte: Elaborada pelos compiladores

Figura 5.1 - Calorímetro utilizado nos experimentos (desmontado)



Fonte: Elaborada pelos compiladores

#### *A Física e a Engenharia Civil: massa térmica*

O projeto da resposta térmica de uma construção está baseado em conceitos como isolamento térmico e inércia térmica (“massa térmica”). O isolamento visa reduzir a transferência de calor entre o ambiente e o prédio, e depende de propriedades como a **condutividade térmica** dos materiais e a **emissividade** das superfícies. A inércia térmica de uma construção está relacionada com outra propriedade: a **capacidade térmica**, ou seja a quantidade de calor requerida para produzir uma certa variação de temperatura em um corpo. Estruturas com grandes massas e/ou feitas de materiais com valores altos de **calor específico** responderão com pequenas variações de temperatura às trocas de calor com o ambiente. Este princípio é amplamente aproveitado em construções em regiões desérticas, que experimentam grande amplitude térmica entre o dia e a noite. O calor absorvido pelas paredes grossas durante o dia é liberado durante a noite, amortecendo a variação térmica no ambiente interno. O efeito é favorecido pelo uso de materiais orgânicos na estrutura, por exemplo o adobe, que em geral possuem valores de calor específico maiores que muitos materiais inorgânicos. Uma outra forma de potenciar o amortecimento térmico é aproveitando o **calor latente** associado às transições de fase: a absorção/liberação de calor sem variação de temperatura. Têm sido desenvolvidos compostos a base de polímeros e parafinas que apresentam transições de fase sólido-sólido na faixa de temperaturas de conforto térmico (20°C). Painéis rígidos feitos destes materiais podem ser aplicados como revestimento de paredes e tetos, sendo capazes de reduzir a extensão da oscilação térmica diária em até 7°C.



### 5.2.3 Medição das trocas de calor: o calorímetro

Vamos considerar um sistema termicamente isolado, onde não há troca de calor com o meio ambiente. Se  $N$  corpos, com temperaturas diferentes, forem colocados no interior desse sistema, haverá troca de calor entre eles de tal forma que a soma algébrica das quantidades de calor,  $\Delta Q_i$ , trocadas até o estabelecimento do equilíbrio térmico, será nula:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0, \quad (3)$$

pois a energia total do sistema, isolado do ambiente, deve ser constante.

No estudo das trocas de calor, os corpos ou substâncias são colocados no interior de *calorímetros*, dispositivos que isolam termicamente a amostra do meio exterior. O desenho e a escolha de materiais do calorímetro visam minimizar a condução térmica com a amostra estudada. Porém, é inevitável que algumas partes do calorímetro participem das trocas de calor que ocorrem em seu interior, e ele mesmo mude de temperatura. Para considerar este efeito é definida a *capacidade térmica do calorímetro*,  $C$ . Este valor constante permite relacionar a quantidade de calor envolvida na variação de temperatura que o calorímetro sofre,  $\Delta t$ :

$$Q = C \Delta t \quad (4)$$

## 5.3 Procedimento experimental

### 5.3.1 Determinação da capacidade térmica de um calorímetro

Para determinar a capacidade térmica de um calorímetro vamos considerar uma quantidade de água de massa  $m_1$  inicialmente a uma temperatura  $t_1$ , em equilíbrio no interior do calorímetro. Uma segunda quantidade de água, de massa  $m_2$  a uma temperatura  $t_2$ , será colocada no interior do calorímetro. Se o calorímetro fosse ideal, com capacidade térmica nula, a transferência de calor entre estas quantidades de água seria descrita como:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) = 0 \quad (5)$$

onde  $t_f$  é a temperatura final de equilíbrio do sistema e  $c_a$  é o calor específico da água.

Entretanto, num calorímetro real haverá sempre troca de calor com as substâncias colocadas em seu interior, e portanto deveremos adicionar essa quantidade de calor trocada na Eq. 5:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0. \quad (6)$$

Isolando a capacidade térmica do calorímetro  $C$ , na Eq. 6, obtemos o parâmetro desejado:

$$C = m_2 c_a \frac{(t_2 - t_f)}{(t_f - t_1)} - m_1 c_a \quad (7)$$

### 5.3.2 Determinação do calor específico de um sólido

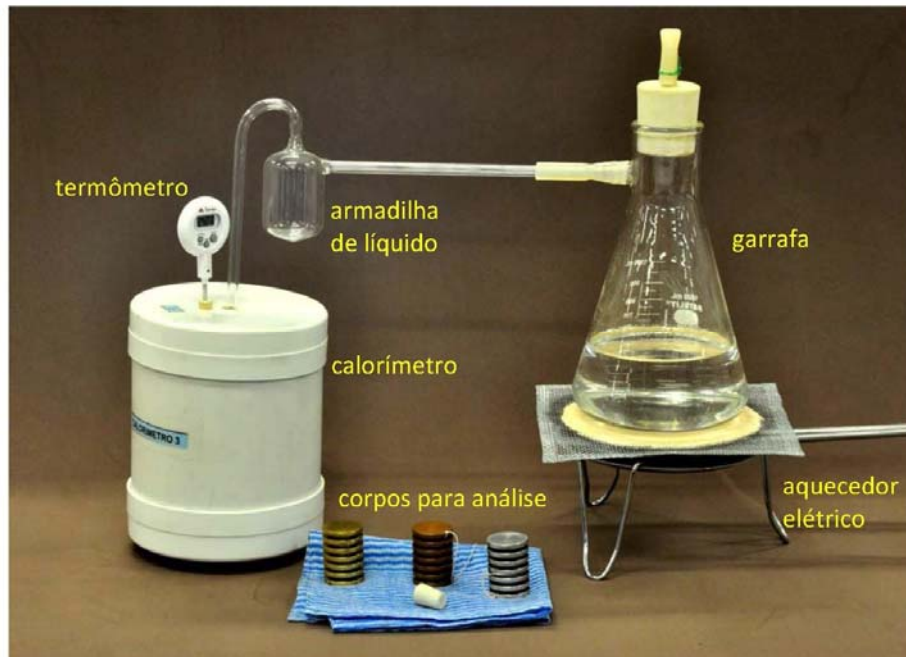
Determinaremos o calor específico de um corpo metálico,  $c_m$ . Neste experimento vamos considerar que uma quantidade de água de massa  $m_1$  a uma temperatura  $t_1$  esteja em equilíbrio no interior de um calorímetro com capacidade térmica  $C$ . O corpo metálico de massa  $m_2$  é preparado a uma temperatura inicial diferente,  $t_2$ , e é introduzido rapidamente no calorímetro. Após certo tempo é atingido o equilíbrio térmico na temperatura final,  $t_f$ . As trocas de calor entre os componentes devem satisfazer:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_m (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0 \quad (8)$$

Isolando a grandeza desejada,  $c_m$ , na eq. (8) obtemos

$$c_m = \frac{(m_1 c_a + C)(t_f - t_1)}{m_2 (t_2 - t_f)} \quad (9)$$

Figura 5.2 - Montagem experimental para medida do calor de vaporização da água.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

### 5.3.3 Determinação do calor latente de condensação da água

Mediremos o calor latente de condensação da água,  $L_c$ , utilizando o dispositivo mostrado na figura 5.1. Um balão contém água em ebulição, sendo o vapor conduzido através de um tubo de vidro até o interior de um calorímetro. O bulbo de vidro serve como armadilha para coletar gotas de água que eventualmente venham condensar durante o trajeto, garantindo assim que somente vapor irá ingressar no calorímetro. O calorímetro inicialmente contém uma massa de água  $m_1$  à temperatura inicial  $t_1$ , em equilíbrio térmico. O tubo conduzindo o vapor é conectado com o calorímetro durante um

certo tempo, ingressando uma massa de vapor  $m_2$ , com temperatura  $t_c$ , que condensará totalmente. Na situação final, o sistema completo (água, vapor condensado e calorímetro) estabiliza numa temperatura comum  $t_f$ . As trocas de calor no processo completo satisfazem a seguinte equação:

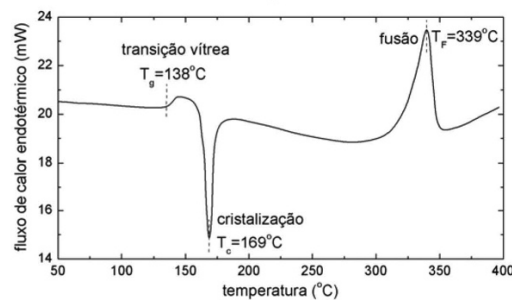
$$m_1 c_a (t_f - t_1) + C(t_f - t_1) + m_2 L_c + m_2 c_a (t_f - t_c) = 0 \quad (10)$$

onde o terceiro e o quarto termos desta expressão estão relacionados, respectivamente, com o processo de condensação da massa  $m_2$  de vapor de água e com a variação de temperatura desta mesma massa, já condensada, de  $t_c$  para  $t_f$ . A partir da Eq. 10 obtemos o valor do calor de condensação da água:

$$L_c = \frac{(m_1 c_a + C)(t_1 - t_f)}{m_2} + c_a (t_c - t_f) \quad (11)$$

### *A Física e a Engenharia: Calorimetria Diferencial por Varredura*

A análise da resposta térmica de um material frente à troca de calor pode fornecer informações importantes sobre sua composição, estrutura e transformações através de mudanças de fase ou reações químicas. A Calorimetria Diferencial por Varredura (conhecida como DSC, Differential Scanning Calorimetry) é uma técnica que permite detectar estas mudanças, e até medir o valor de calor específico em função da temperatura. Neste tipo de calorímetro, um fluxo de calor constante é entregue à amostra de material, que está em contato com uma amostra de referência inerte. A diferença de temperatura entre as amostras é medida em função do tempo, sendo obtido um gráfico de calor absorvido pela amostra de interesse em função de sua temperatura. A presença de picos neste gráfico revela a ocorrência de transições de fase ou reações químicas, pois nestes processos a amostra absorve (processo endotérmico) ou libera calor (processo exotérmico) sem variar sua temperatura. Assim, por exemplo, uma transição de fase de fusão é um evento endotérmico: energia é entregue ao material para separar as moléculas/átomos, não havendo aumento de temperatura.



Curva de análise térmica para uma amostra do polímero poliétercetona  
Fonte: Elaborada pelos compiladores

Na figura é mostrada a curva de análise térmica para uma amostra do polímero poliétercetona. Embaixo de 169°C o polímero se encontra em estado vítreo: não há ordem estrutural das cadeias poliméricas. O diagrama mostra um evento endotérmico em aproximadamente 140°C, correspondente à **transição vítrea**: nestas temperaturas as cadeias podem realizar movimentos cooperativos que estavam restritos em temperaturas mais baixas, o que provoca uma absorção maior de calor. Neste regime a fluidez do material aumenta. Em 169°C ocorre um evento exotérmico de grande intensidade: a transição de **cristalização**. Ao aumentar a mobilidade molecular, as cadeias podem assumir configurações que minimizam as energias de interação inter-atômicas. Estas configurações correspondem ao **estado cristalino**, onde a estrutura molecular é ordenada e periódica. O excesso de energia potencial inter-atômica do estado vítreo em relação ao cristalino é liberado como calor. Em 339°C se observa um evento endotérmico intenso, correspondente à fusão do cristal. O calor absorvido pelo material, correspondente ao **calor latente de fusão**, é a energia térmica necessária para separar as moléculas do sólido, vencendo as forças inter-atômicas atrativas.

***A Física e a Engenharia Mecânica: arrefecimento de motores***

O calor gerado durante o funcionamento de um motor de combustão deve ser retirado rapidamente do sistema através do sistema de arrefecimento. O calor deve ser transferido para o líquido de arrefecimento, passando através das galerias internas do motor. A principal propriedade do líquido é possuir um alto valor de **calor específico**, para garantir o menor aumento de sua temperatura. Por este motivo a água é apropriada, mas a faixa de temperaturas em estado líquido precisa ser estendida. A adição de 50% de etileno glicol desloca as temperaturas de congelamento e ebulição para  $-33^{\circ}\text{C}$  e  $163^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. A pressurização do líquido pode elevar ainda mais a temperatura de ebulição, fenômeno que é aproveitado nas panelas de pressão. No líquido são adicionados anti-corrosivos para proteção das partes metálicas e as borrachas das vedações. Uma bomba força a circulação do líquido pelo motor e, quando é atingida a temperatura de regime, é derivado para o radiador. Neste componente ocorre a transferência do calor da água para o ambiente, maximizada pela grande área exposta da tubulação e a passagem forçada de ar pela superfície. O fluxo de água e a rotação do ventilador são controlados em função da temperatura do líquido. Após esta etapa de esfriamento, o fluido é injetado novamente no motor.

- Como influencia na eficiência da retirada de calor do motor o valor do *fluxo* de líquido? Deve ser alto, baixo ou existe algum valor ótimo intermediário?

## 5.4 Procedimento experimental

### 5.4.1 Determinação da capacidade térmica do calorímetro

- Coloque no interior do calorímetro 120 g de água,  $m_1$ , inicialmente a uma temperatura cerca de  $10^{\circ}\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente.
- Meça continuamente a temperatura no interior do calorímetro, até o sistema entrar em equilíbrio térmico, com temperatura  $t_1$ .

- c) Adicione agora no calorímetro mais 120 g de água,  $m_2$ , a temperatura  $t_2$  da ordem de 20 °C acima da temperatura ambiente.
- d) Espere novamente o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura,  $t_f$ .
- e) Determine a capacidade térmica do calorímetro  $C$ , utilizando a eq. (7). Compare este resultado com o valor da capacidade térmica do copo de alumínio:  $C_{\text{copo}} = m_{\text{copo}} C_{\text{Al}}$ . Qual é a relação entre eles? Quem deveria ser maior?

#### **5.4.2 Determinação do calor específico de um metal**

- a) Coloque no interior do calorímetro aproximadamente de 150 g a 200 g de água,  $m_1$ , inicialmente a uma temperatura cerca de 5°C abaixo da temperatura ambiente;
- b) Espere este sistema entrar em equilíbrio térmico e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_1$ .
- c) Coloque agora no interior do calorímetro uma peça de metal com massa  $m_2$  e temperatura  $t_2$  igual a temperatura de ebulição da água.
- d) Espere o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura  $t_f$ .
- e) Determine o calor específico do metal utilizado a eq. (9) e compare com o valor tabelado. Discuta seus resultados. Se necessário, repita o procedimento.



### 5.4.3 Determinação do calor latente de condensação da água

- a) Coloque aproximadamente 150 g de água,  $m_1$ , no interior do calorímetro a uma temperatura cerca de 10 °C abaixo da ambiente.
- b) Espere este sistema entrar em equilíbrio térmico e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_1$ .
- c) Sem colocar o tubo de vidro no interior do calorímetro, como indicado na figura 5.2, aqueça a água até atingir a temperatura de ebulição,  $t_c$ . Atingida a condição de regime estacionário, onde a água está em ebulição e o vapor flui controladamente no tubo de vidro totalmente aquecido, introduza-o no interior do calorímetro.
- d) Meça a temperatura do calorímetro até que o mesmo atinja cerca de 70 °C. Isto equivale a aproximadamente à entrada de 20 g de vapor no calorímetro.
- e) Retire o tubo de vidro do calorímetro, tampe, espere o sistema entrar em equilíbrio e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_f$ .
- f) Meça a massa de água condensada,  $m_2$ , conhecendo a massa do copo do calorímetro e a massa inicial de água previamente colocada no mesmo,  $m_1$ .
- g) Determine o calor latente de condensação da água através da eq. 11, discuta seu sinal e compare com valor tabelado.

## ***Bibliografia***

TIPLER, P. A. **Física**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1999. v.1.

---

## **Capítulo 6 Processos térmicos em gases**

### **Parte A: Medida do fator $\gamma$ do ar**

#### **6.1 Objetivo**

Determinar o valor do fator  $\gamma$  do ar, a razão entre os calores específicos a pressão e volume constantes  $\gamma = c_p/c_v$ , utilizando o método de Cléments-Desormes e o Método de Ruchardt.

#### **6.2 Introdução**

##### **6.2.1 O método de Cléments-Desormes**

O calor específico de sólidos e líquidos usualmente é medido com a amostra em condições atmosféricas e sem controle do volume do material. Por este motivo, se trata de calores específicos medidos a pressão constante:  $c_p$ . Este foi o caso do experimento realizado na Prática 5, onde a peça de metal se encontrava essencialmente à pressão atmosférica. No caso de um gás, é muito mais simples fazer o experimento com o gás contido em um recipiente rígido, por exemplo uma ampola de vidro com pouca expansão térmica dentro da faixa de temperatura do experimento. Portanto, nesta condição o valor medido é o calor específico a volume constante  $c_v$ . O valor de  $c_p$  de um gás é maior que  $c_v$ , pois no experimento a pressão

constante o calor entregue ao material provoca também expansão do gás, o que significa que parte dessa energia foi convertida em trabalho e não em aumento da energia térmica do corpo.

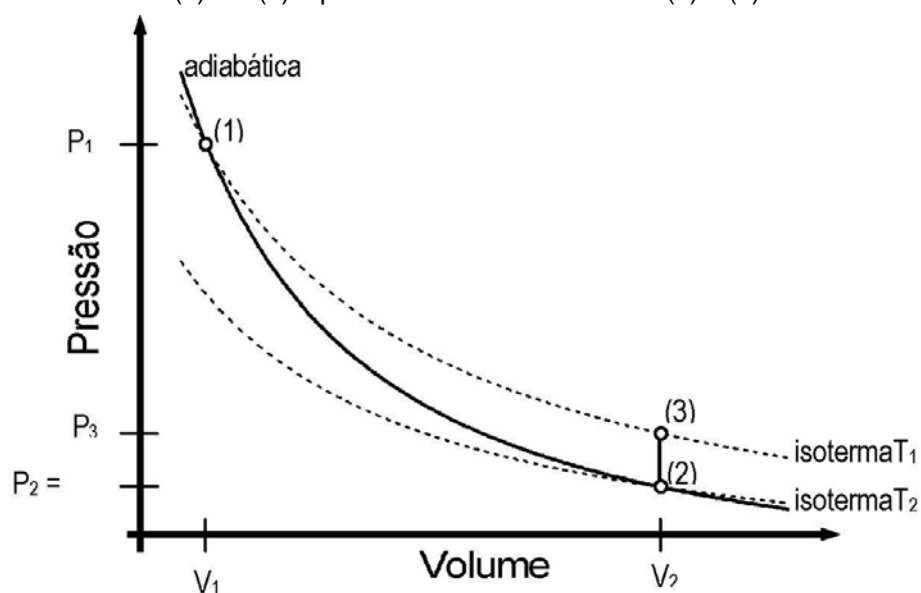
A razão entre os calores específicos a pressão e volume constante  $\gamma = c_p/c_v$ , é um valor que aparece freqüentemente na descrição de processos termodinâmicos feitos com o gás. Esta razão pode ser medida através de processos isobáricos e isocóricos, para determinar o calor específico a pressão e volume constante, respectivamente. O experimento para medir o fator de  $\gamma$  em gases foi realizado pela primeira vez em 1819 pelos químicos Charles-Bernard Desormes e Nicolas Clément. O método consiste em aplicar sobre o gás, suposto ideal, uma seqüência de dois processos ilustrados na figura 6.1: uma expansão adiabática do estado (1) até (2), e um aquecimento isocórico desde (2) até (3). No estado inicial de equilíbrio (1), certa quantidade de moles  $n$  de gás se encontram a pressão  $P_1$  acima da pressão atmosférica, com volume  $V_1$  e temperatura  $T_1$  igual à temperatura ambiente. Uma expansão adiabática é realizada até o estado (2) com pressão  $P_2$  igual à pressão atmosférica, volume  $V_2$  e temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Imediatamente é realizado um aquecimento isocórico até o estado (3), a temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_3$ .

Para calcular o fator  $\gamma$  do gás, consideramos a relação entre  $P$  e  $V$  a longo de um processo adiabático:  $P V^\gamma = \text{constante}$ . Assim podemos escrever que

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (1)$$

Desta relação é possível chegar a escrever o fator  $\gamma$  como

Figura 6.1 - Diagrama P-V para o processo sobre o gás aplicado no experimento de Cléments-Desormes: entre o estado inicial (1) e o (2) o processo é adiabático. Entre (2) e (3) é isocórico.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

$$\gamma = - \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \quad (2)$$

Para obter o resultado apenas em termos de pressões e não de volumes, que na prática serão difíceis de medir com precisão, pode se considerar agora o processo isocórico (2)  $\rightarrow$  (3) e a condição que os estados (1) e (3) se encontram sobre a mesma isoterma de temperatura  $T_1$ . Resulta assim

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_3}{P_1}\right)} \quad (3)$$

### 6.2.1.1 Medida das pressões

No experimento montado no laboratório, as pressões serão medidas usando um manômetro de coluna de água aberto num extremo, tal como indicado na figura 6.2. Neste caso as pressões em função da altura  $h$  da coluna resultam:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{ATM} + \rho g h_1 \\ P_2 &= P_{ATM} \\ P_3 &= P_{ATM} + \rho g h_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Observe que para  $P_2$ , que é à pressão atmosférica  $P_{ATM}$ , a altura de coluna de água deve ser nula:  $h_2 = 0$ . Com estas expressões e com (3) já é possível calcular  $\gamma$  a partir das medidas de  $P_{ATM}$ ,  $h_1$  e  $h_3$ . No entanto, é possível ainda obter uma expressão mais compacta para  $\gamma$  em função das alturas medidas nos manômetros fazendo uma aproximação em (3). Em primeiro lugar, reescrevemos as pressões  $P_1$  e  $P_3$  como:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{P_{ATM}} \right) \\ P_3 &= P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_3}{P_{ATM}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Em segundo lugar, podemos utilizar uma expressão da função logaritmo na forma de uma série infinita:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

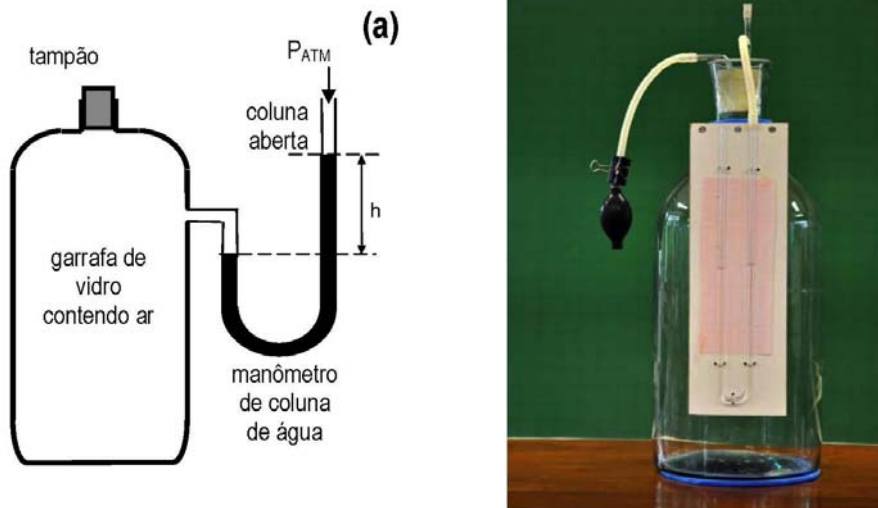
que é válida quando  $x < 1$ . Quanto mais termos sejam considerados na série do lado direito, mais próximo será o resultado da soma ao valor de  $\ln(1+x)$ . A aproximação mais simples desta expressão, válida quando  $x$  é muito pequeno ( $x \ll 1$ ) é simplesmente considerar o primeiro termo da série

$$\ln(1+x) \cong x \quad (6)$$

Substituindo em (3) as expressões de (4) para  $P_1$  e  $P_3$ , é possível usar a aproximação (6) nos logaritmos, identificando a  $x$  com a razão  $\frac{\rho g h}{P_{ATM}}$ , resultando a expressão aproximada:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (7)$$

Figura 6.2 - Experimento de Cléments-Desormes: (a) esquema do dispositivo com o manômetro acoplado. (b) Montagem experimental com a bomba manual para pressurização do gás na garrafa e o manômetro com coluna de água.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

### 6.2.2 Método de Ruchardt

Empurrando ou puxando o êmbolo de um recipiente que contém um gás e soltando-o, ele oscilará em torno da posição de equilíbrio: existe sobre o gás uma força restauradora a qual, quando  $\Delta V \ll V_0$ , é análoga à força que atua na mola de um sistema massa-mola deslocado da posição de equilíbrio. O gás contido no recipiente é, assim, análogo a uma mola. Considere um recipiente de volume  $V$  que contém um gás (no caso ar) e onde se coloca um tubo vertical conforme mostra a figura 6.3.



Figura 6.3 - Montagem utilizada nas medidas do método de Ruchardt



Fonte: Elaborada pelos compiladores

Uma esfera de aço de massa  $m$  e diâmetro ligeiramente menor do que o diâmetro interno do tubo é colocada neste, funcionando como um êmbolo para o gás contido no recipiente. Quando a esfera está na posição de equilíbrio, a pressão no interior do recipiente é dada por:

$$P = P_{atm} + \frac{mg}{A}, \quad (8)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal do tubo.

Se a esfera é deslocada de uma distância  $y$  da posição de equilíbrio, o volume do recipiente variará de:

$$dV = A dy \quad (9)$$

A pressão também varia devido ao deslocamento da esfera, provocando uma força restauradora sobre ela dada por

$$dF = AdP \quad (10)$$

Como as oscilações da esfera são rápidas, as variações de volume e de pressão podem ser consideradas *adiabáticas*, de maneira que:

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0 \quad (11)$$

Substituindo  $dV$  e  $dP$  nas equações (9) e (10), respectivamente, obtém-se para a força restauradora

$$F = -\frac{\gamma PA^2}{V} y \quad (12)$$

Fazendo analogia com a força restauradora de uma mola ( $F = ky$ ), podemos escrever para o período de oscilação da esfera

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(\gamma PA^2 / V)}} \quad (13)$$

onde  $P$  é dado pela equação (8).

## 6.3 Parte Experimental

### 6.3.1 Método de Cléments-Desormes

O recipiente utilizado para conter o gás (ar) será um garrafão de vidro com um manômetro de água acoplado, como mostrado na figura 6.2. A garrafa tem uma rolha para tampar/destampar (rolha pequena mostrada na figura 6.2.b) e uma entrada adicional acoplada a uma bomba manual, para aumentar a pressão interior do gás. O procedimento sugerido está indicado a seguir, seguindo a sequência ilustrada na figura 6.4.

Figura 6.4 - Representação esquemática dos três estados considerados no processo do experimento de Cléments-Desormes.  $P_2$  = pressão atmosférica.



Fonte: Elaborada pelos compiladores

- Preparação:** o garrafão é tampado e, utilizando a bomba manual, certa quantidade de ar é injetada para aumentar a

- pressão interna. Espere o sistema entrar em equilíbrio (observe a estabilização da leitura do manômetro) num estado com temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_1$  (e altura  $h_1$  no manômetro). Este é o estado inicial (1). Registre o valor de  $h_1$ .
- b. **Processo adiabático:** destampe e feche rapidamente o garrafão. Desta forma a pressão interna deve ficar igual à pressão atmosférica:  $P_2 = P_{ATM}$ . Como o processo de abertura/tampado é rápido, o gás que está no interior do garrafão não tem tempo de trocar calor com o ambiente nesse intervalo de tempo: a condutividade térmica do vidro é baixa. Portanto, o processo pode ser considerado adiabático. Quando o tampão é fechado, estamos no estado (2).
- c. **Processo isocórico:** imediatamente após a expansão adiabática o gás deveria estar numa temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Espere um certo tempo até a temperatura do sistema atingir a temperatura ambiente  $T_1$ . Como a garrafa é rígida, o processo ocorre com volume constante  $V_2$ . Quando o gás atingir a  $T_1$ , o sistema se encontra no estado final (3). Registre a pressão  $P_3$  nessa condição (altura  $h_3$ ).
- d. Calcule  $\gamma$  e repita o processo experimentando com diferentes tempos de abertura do tampão do garrafão e decida qual é o mais conveniente. Tempos curtos demais talvez não sejam suficientes para liberar o excesso de pressão e atingir a pressão atmosférica dentro da garrafa. Tempos longos demais são inconvenientes, pois o ar tem tempo de trocar

calor com o ambiente, e o processo já não poderá ser considerado adiabático.

- e. Uma vez escolhido o tempo mais apropriado, repita várias vezes o processo para fazer uma estatística sobre  $\gamma$  (média e desvio padrão).

Questões para serem discutidas *antes* de realizar a prática, e incluídas no relatório:

- 1) Demonstre a expressão (3).
- 2) Demonstre a expressão (7).

Questões para serem discutidas durante a prática, e incluídas no relatório:

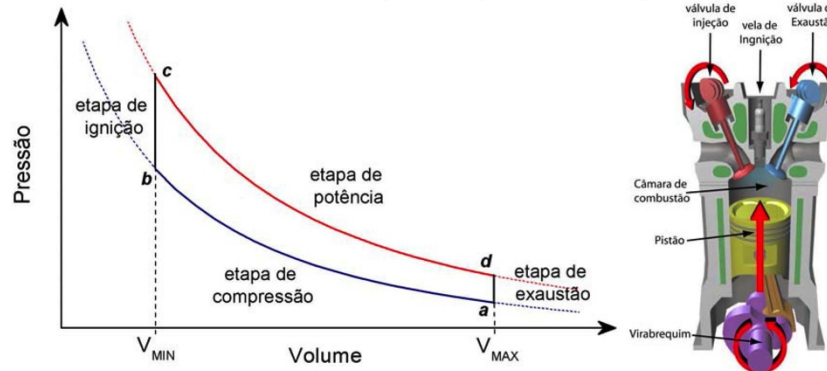
- 1) Qual é a quantidade de gás que efetivamente participa do processo completo (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)? É todo o ar que está no garrafão após pressurizar com a bomba, no estado (1)?
- 2) Usando valores experimentais, faça um cálculo aproximado do número de moles de ar  $n$  que efetivamente participaram no processo.

### 6.3.2 Parte Experimental - Método de Ruchardt

- a) Utilizando o dispositivo esquematizado na figura 6.3, meça o período de oscilação da esfera e todas as grandezas necessárias para calcular o  $\gamma$  do ar pela equação (13).
- b) Discuta o resultado obtido através de ambos os métodos comparando com os valores esperados para gases monoatômicos ( $\gamma \approx 1,67$ ), diatômicos ( $\gamma \approx 1,4$ ) e poliatômicos ( $\gamma \approx 1,3$ ).

### *A Física: o motor de combustão interna.*

Os motores de combustão interna a gasolina são o exemplo mais comum de máquinas térmicas. O princípio de funcionamento pode ser descrito pela seqüência de processos termodinâmicos conhecida como **ciclo de Otto**, mostrado na figura, a esquerda, que é implementado pelo sistema mecânico mostrado na figura, a direita. A substância submetida a estes processos é a mistura de ar e gotículas de gasolina injetada dentro da câmara de combustão. O ciclo Otto de quatro tempos esta definido pelas seguintes etapas:



Fonte: Elaborada pelos compiladores

**$a \rightarrow b$**  : Uma **compressão** da mistura realizada rapidamente pelo pistão, que pode ser considerada aproximadamente **adiabática**.

**$b \rightarrow c$**  : A **combustão da gasolina** na mistura, induzida com a faísca gerada pela vela de ignição. O processo de **ignição** libera calor e aumenta a pressão e temperatura muito rapidamente, sem movimentar inicialmente o pistão. Portanto, esta etapa pode se aproximar com um processo **isocórico** (volume constante). A energia associada à combustão pode ser dimensionada conhecendo o valor do **calor de combustão** da substância colocada em ignição com o oxigênio. Para gasolina em condições padrão de pressão e temperatura é de 47MJ/Kg.

**$c \rightarrow d$**  : A explosão eventualmente acelera o pistão que gira o virabrequim: este é a etapa de **potência** aqui que o motor produz trabalho mecânico útil. Como o deslocamento é rápido a expansão do gás pode ser considerada **adiabática**.

**$d \rightarrow a$**  : No final do percurso do pistão, é necessário liberar o gás de exaustão do cilindro e injetar ar e gasolina novos. O gás ainda quente é liberado pela abertura da **válvula de exaustão**. A válvula é fechada e imediatamente é aberta a **válvula de injeção** que permite a entrada de gasolina e ar na temperatura ambiente. O efeito de todo este processo de **exaustão** equivale a manter o volume de fluido constante e liberar calor para o exterior, e pode ser aproximado por um processo **isocórico**. A partir deste ponto, o motor está preparado para reiniciar o ciclo.

(continua)

**A Física: o motor de combustão interna. (continuação)**

A razão entre os volumes máximos e mínimos atingidos no ciclo é a **razão de compressão** do motor  $r = V_{\text{MAX}}/V_{\text{MIN}}$ . Quanto maior é este fator, maior é a capacidade do motor realizar trabalho. Valores típicos para motores de carros variam entre 8 e 12. O **coeficiente de eficiência máxima** do motor é definido como a razão entre o trabalho total  $W$  produzido no ciclo pelo calor  $Q_c$  gerado na combustão:  $e = W/Q_c$ . Para um ciclo Otto idealizado, e supondo que a mistura se comporta como um gás ideal, resulta:

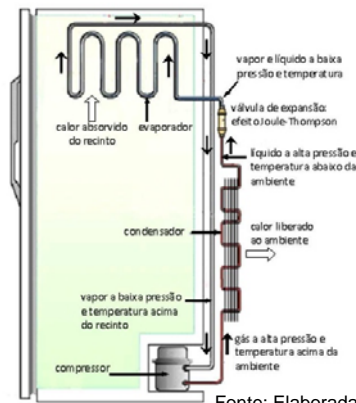
$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

Portanto, o fator  $\gamma = c_p/c_v$  do fluido de combustão resulta fundamental para definir a eficiência do motor. Como exemplo, se fosse  $r = 10$  e o valor de  $\gamma$  fosse considerado como o valor do ar 1,40, a eficiência máxima termodinâmica é 0,60. No entanto a eficiência dos motores reais é consideravelmente mais baixa, da ordem de 0,40, devido ao atrito das partes móveis, transferências de calor para o cilindro e pistão e menor calor de combustão da mistura, entre outros fatores.



### *A Física: refrigeradores*

Num processo de expansão adiabática de um gás o volume aumenta e não há troca de calor com o ambiente, e a temperatura diminui. Este fenômeno é a base das máquinas que bombeiam calor, como os aparelhos de ar condicionado ou os refrigeradores. Estas máquinas usam um caso particular de expansão adiabática, chamada de efeito de Joule-Thompson, que ocorre após um gás ser forçado a passar por uma pequena abertura (uma válvula capilar ou um meio poroso).



A figura mostra um esquema do refrigerador por compressão de vapor, que é o sistema comumente utilizado em geladeiras. Existe um fluido, por exemplo o gás freon, que circula pelo sistema em ciclo fechado impulsionado por um compressor. O gás foi pressurizado até passar ao estado líquido, e é injetado na válvula de expansão. Após a passagem pela válvula, a temperatura cai bruscamente e há vaporização parcial do líquido devido à queda de pressão. Esta mistura fria de vapor e gotas de líquido circula pelo evaporador: uma tubulação de cobre longa em forma de serpentina. Nas geladeiras, é tubulação que fica na parte superior, envolvendo a cavidade do freezer. Como o fluido está mais frio que o conteúdo do freezer, o líquido absorve calor suficiente para transigir ao estado de vapor. Como foi analisado na prática de calorimetria, nessa transição é absorvido calor (calor latente de vaporização) sem mudança de temperatura. Desta forma, o fluido consegue extrair calor do recinto de esfriamento.

O compressor retira este fluido, agora em estado de vapor, e injeta-o na seção do condensador: uma serpentina de cobre em contato com o ambiente. Na geladeira, é a tubulação que fica na parte externa. O compressor aumenta a pressão e a temperatura do gás, acima da temperatura ambiente, que é injetado no condensador. Ao passar pela serpentina do condensador, em contato térmico com o ambiente, o gás libera calor e condensa (calor latente de condensação). Desta forma, o calor foi bombeado de uma cavidade (o freezer ou a sala refrigerada) para o ambiente externo. Neste ponto o ciclo é repetido novamente para continuar com a extração de calor. Um par bimetálico desliga o compressor quando a temperatura do recinto atinge um valor de referência mínimo, e liga novamente quando a temperatura sobe acima do limite máximo tolerado. O aparelho de ar condicionado funciona de forma semelhante, com a adição de ventiladores no condensador e no evaporador para fazer mais eficiente a troca de calor com os ambientes externo e interno, respectivamente.

## Parte B: Zero absoluto - Método dos mínimos quadrados

### 6.4 Objetivo

- Determinação da temperatura de zero absoluto.
- Aplicação do método dos mínimos quadrados.

### 6.5 Introdução

#### 6.5.1 Expansão térmica dos gases - zero absoluto

Aumentando-se a temperatura de um gás contido em um recipiente, ele poderá expandir de diversas maneiras, já que a pressão e o volume podem variar simultaneamente. Evidentemente poderá haver apenas mudança de volume se mantivermos a pressão constante, ou ele exercerá pressões diferentes se o volume for mantido constante. Poderíamos realizar essa expansão colocando o gás em um cilindro fechado por um êmbolo que pode ser deslocado sem atrito, no qual atua uma pressão constante. Experimentalmente pode-se observar que a variação de volume a pressão constante é praticamente proporcional ao volume inicial e a variação de temperatura. Se a temperatura inicial do gás é  $0^{\circ}\text{C}$  e o seu volume inicial é  $V_0$ , o volume  $V(T)$  a temperatura  $T$   $^{\circ}\text{C}$  será dado por

$$V(T) = V_0(\beta T + 1) , \quad (14)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de dilatação do gás a pressão constante. O valor de  $\beta$  é  $0,003660(\text{°C})^{-1} \cong \frac{1}{273}(\text{°C})^{-1}$ , e pode ser considerado como o coeficiente de dilatação dos gases ideais a pressão constante.

Se agora aumentarmos a temperatura do gás mantido a volume constante, sua pressão deverá variar linearmente com a temperatura. Se a temperatura inicial do gás é  $0^\circ\text{C}$  e a sua pressão inicial é  $P_0$ , a pressão  $P(T)$  a temperatura  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ) será dada por

$$P(T) = P_0(\beta T + 1) = P_0\beta T + P_0, \quad (15)$$

onde  $\beta$  neste caso é o coeficiente de dilatação a volume constante. Isso pode ser feito pois os coeficientes de dilatação são idênticos para o gás ideal, enquanto que para os gases reais ambos coeficientes são muito próximos a  $1/273$  ( $^\circ\text{C}$ ) $^{-1}$ .

Substituindo o valor de  $\beta$  na Eq. (15) temos:

$$P(T) = P_0\left(1 + \frac{T}{273}\right) \quad (16)$$

Neste caso podemos observar que, para  $T = -273^\circ\text{C}$ , teremos a pressão,  $P$ , nula.

**Denominamos essa situação de temperatura de zero absoluto e é a menor temperatura que se pode fisicamente alcançar.**

## 6.6 Experimental: zero absoluto

O termômetro a gás a volume constante consiste de um bulbo de vidro contendo hélio, que é ligado a um barômetro do tipo Torricelli, cujo desenho esquemático é mostrado na figura 6.5 abaixo. O termômetro é formado por um tubo em “U” contendo mercúrio em seu interior e com um dos braços lacrados para que a pressão em seu interior seja zero. No outro braço é colocado um balão de vidro contendo gás hélio a uma pressão próxima da pressão atmosférica. Para a leitura de pressão neste barômetro, basta observar que a pressão exercida pelo gás He no ponto A é exatamente igual à pressão exercida pela coluna de Hg sobre o ponto B, a qual pode ser dada diretamente pela sua altura  $H$  (em cm Hg).

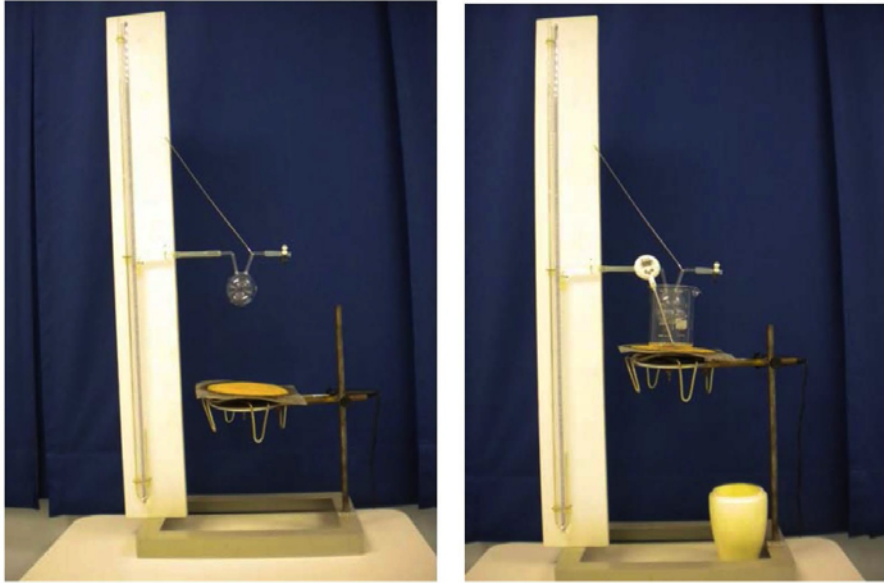
### 6.6.1 Procedimento

- a) Meça a pressão do gás para diversas temperaturas, definidas como a temperatura ambiente, do gelo fundente, do nitrogênio líquido ( $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) e da água em ebulição.
- b) Construa uma tabela com os dados obtidos.
- c) Construa um gráfico da pressão (medida em cmHg) em função da temperatura (medida em  $^{\circ}\text{C}$ ).
- d) Determine pelo método dos mínimos quadrados, o coeficiente de dilatação dos gases ideais à volume constante,  $\beta$ . E o valor

de  $P_0$ . Com o valor de  $\beta$  e  $P_0$ , escreva a equação que descreve este comportamento (Equações apresentadas no anexo 2).

- e) Utilizando a equação determinada no item (d), trace uma reta sobre os pontos experimentais. A partir da extrapolação desta reta no gráfico, determine a temperatura de zero absoluto.

Figura 6.5 - Termômetro a gás a volume constante



Fonte: Elaborada pelos compiladores

## ***Bibliografia***

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1985. v.1b.

## Anexo 1 Propagação de incertezas

Seja  $z$  uma grandeza física que depende de outras grandezas medidas com incerteza:  $y \pm \Delta y$ ,  $x \pm \Delta x$ , ..., relacionada através da função  $z = f(x, y, \dots)$ . A incerteza  $\Delta z$  propagada para a grandeza  $z$  é:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Aplicando esta equação para funções simples, se obtêm os resultados de  $z \pm \Delta z$  mostrados na tabela embaixo.

$z = f(x, y, \dots)$		$\Delta z$
soma	$z = x + y$	$\Delta x + \Delta y$
subtração	$z = x - y$	$\Delta x + \Delta y$
produto	$z = x \cdot y$	$x \Delta y + y \Delta x$
produto por uma constante $a$	$z = a \cdot x$	$a \Delta x$
potência	$z = x^n$	$n x^{n-1} \Delta x$
divisão	$z = \frac{x}{y}$	$\frac{x \Delta y + y \Delta x}{y^2}$
coosseno	$z = \cos(x)$	$\text{sen}(x) \Delta x$
seno	$z = \text{sen}(x)$	$\cos(x) \Delta x$
logaritmo de base $c$ $e = 2.7182\dots$	$z = \log_c(x)$	$\frac{\log_c e}{x} \Delta x$
exponencial	$z = c^x$	$c^x \ln(c) \Delta x$





## Anexo 2 Expressões para o método de mínimos quadrados

Seja um conjunto de N pares de dados experimentais  $(x_i; y_i)$ , onde os valores  $x_i$  são atribuídos à variável independente e  $y_i$  à variável dependente. Supondo que a relação  $y(x)$  seja considerada linear com  $y = ax + b$ , o método de mínimos quadrados fornece os valores para a inclinação  $a$  e o termo linear  $b$  para a reta que melhor se aproxima dos dados experimentais. As expressões dos coeficientes da reta e suas respectivas incertezas são:

$$a = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{N}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \cdot \Delta y = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \cdot \Delta y = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum (x_i - \bar{x})^2}} \cdot \Delta y$$

sendo  $\Delta y$  o desvio padrão do ajuste:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{(N - 2)}}$$

e as quantidades  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  as respectivas médias dos conjuntos de dados  $x_i$  e  $y_i$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$